সহজ ক্যালকুলাস

মুহম্মদ জাফর ইকবাল

ভূমিকা

ক্যালকুলাস বিষয়টা আমার কাছে সবসময়েই প্রায় ম্যাজিকের মত মনে হয়েছে! যারা বিজ্ঞান কিংবা প্রযুক্তি নিয়ে লেখপড়া করে তাদের সবাইকেই আগে হোক কিংবা পরে হোক এটা শিখতে হয়। কিন্তু অনেক সময়েই দেখেছি ছেলেমেয়েরা ক্যালকুলাস ব্যবহার করার কিছু নিয়ম শিখেই কাজ চালিয়ে যাচ্ছে। তার ভেতরকার সৌন্দর্যটা নিয়ে আগ্রহী হচ্ছে না, তাই আমি এই ছোট বইটা লিখেছি ছেলেমেয়েদের ভেতর ক্যালকুলাসের জন্যে আগ্রহ জন্মানোর জন্যে!

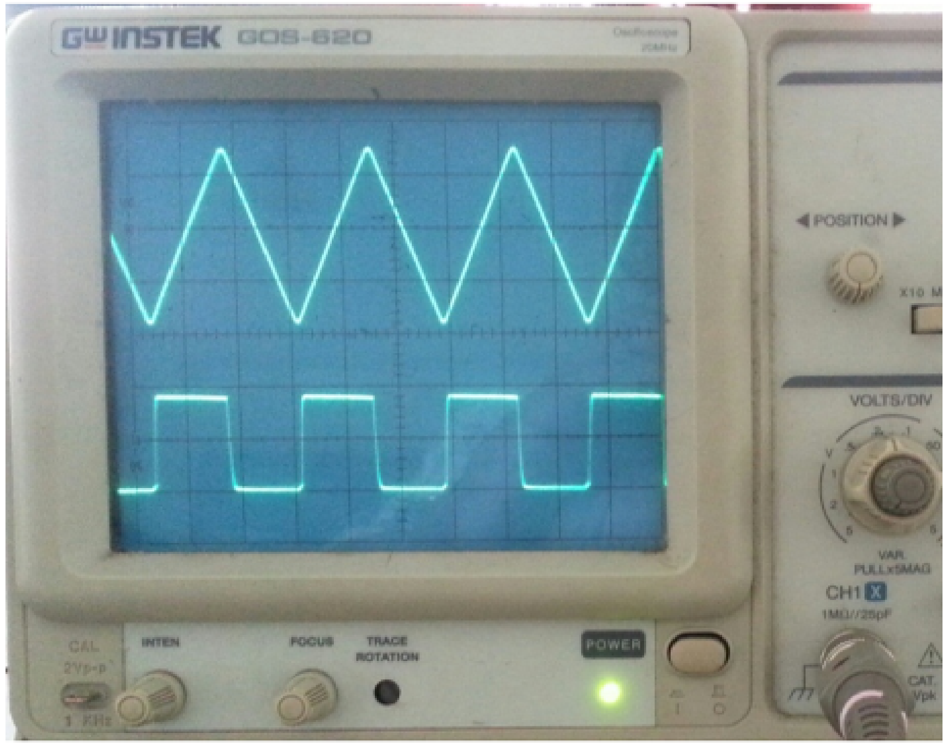
তবে সবাইকে আমি মনে করিয়ে দিই, গণিতের একটা বই লেখার জন্যে যে রকম নিয়ম মেনে চলতে হয় এই বইয়ে সেটা কিন্তু মেনে চলা হয়নি। যেমন, অন্তত একটি জায়গায় সত্যিকারের ফাংশন নয় সে রকম একটি উদাহরণেও ক্যালকুলাস ব্যবহার করা হয়েছে (দেখি কে সেটা বের করতে পারে!) তাই কেউ যদি এই বই পড়েই থেমে যায় তাহলে হবে না, এটা পড়া শেষ করে তাকে সত্যিকারের ক্যালকুলাস বই পড়তে হবে।

আরও একটা বিষয় মনে করিয়ে দেয়া যায়– মানুষ যেভাবে বিছানায় শুয়ে কিংবা গালে হাত দিয়ে গল্প বই পড়ে সেভাবে এই বইটি পড়লে হবে না। চেয়ার টেবিলে বসে খাতা এবং কলম হাতে নিয়ে এটি পড়তে হবে, উদাহরণগুলো বুঝতে হবে, অনুশীলনীগুলো সমাধান করতে হবে! তা না হলে কিন্তু ক্যালকুলাস শেখা হবে না!

মুহম্মদ জাফর ইকবাল

৯.৬.২০১৬

ডিফারেন্সিয়েশান কিংবা ডেরাইভেটিভ



ইলেকট্রনিক্স সার্কিট দিয়ে ডিফারেন্সিয়েট করা। উপরের ফাংশনটির ডেরাইভেটিভ নিচে।

1. ক্যালকুলাস কেন?

যারা প্রথমবারের মত ক্যালকুলাস শিখতে যাচ্ছে তাদের অনেকের মনেই প্রশ্ন জাগতে পারে, কেন একজনকে ক্যালকুলাস শিখতে হবে? আমরা পাটিগণিত শিখেছি, এলজেবরা শিখেছি, জ্যামিতি শিখেছে– এই গুলি দিয়েই কি কাজ চালিয়ে দেয়া যায় না? ক্যালকুলাস নামে সম্পূর্ণ নূতন একটা গণিত কেন আমাদের শিখতে হবে?

উত্তরটা খুবই সোজা, এক কথায় বলে দেয়া যায় : ক্যালকুলাস না জানলে বিজ্ঞানের খুব সাধারণ কাজকর্মও চালানো যায় না। যেমন তোমরা সবাই গতিবেগের বিষয়টা জান, কোনো একটা কিছু চলতে থাকলেই আমরা বলি তার একটা গতিবেগ আছে। তুমি যদি ক্যালকুলাস না জান তাহলে একটা বস্তুর গতিবেগ পর্যন্ত বের করতে পারবে না!

অতিক্রান্ত সময় (s)	অতিক্রান্ত দূরত্ব (m)
1	5
2	20
3	45
4	80

1 নং টেবিল

যারা আমার কথা বিশ্বাস করছ না তাদেরকে সহজ থেকেও সহজ একটা প্রশ্ন করা যাক। ধরা যাক তুমি দেখছ একটা গাড়ি প্রথম সেকেন্ডে দূরত্ব অতিক্রম করেছে $5m$, দ্বিতীয় সেকেন্ডের শেষে মোট দূরত্ব অতিক্রম করেছে 20m। ঠিক একইভাবে দেখা গেল তৃতীয় সেকেন্ডের শেষে গাড়িটির মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব $45m$ এবং চতুর্থ সেকেন্ডের শেষে সর্বমোট অতিক্রান্ত দূরত্ব হচ্ছে $80m$. বিষয়টা বুঝতে যেন সমস্যা না হয় সেজন্য 1 নং টেবিলে বিষয়টা দেখিয়ে দেয়া হল।

এখন তোমাদেরকে সোজা থেকেও সোজা একটা প্রশ্ন করা যাক, গাড়িটা কত বেগে চলছে?

মোটামুটি নিশ্চিতভাবে বলা যায় তোমাদের কেউ কেউ বলছ, যেহেতু 4 সেকেন্ডে মোট $80m$ দূরত্ব অতিক্রম করেছে তাই গাড়িটার বেগ হচ্ছে :

$$v = \frac{80m}{4s} = 20\ m/s$$

কেউ কেউ বলছ, ব্যাপারটা এত সোজা না, গাড়িটার বেগ আস্তে আস্তে বাড়ছে কাজেই আমি যদি 80m কে 4s দিয়ে ভাগ করে বেগ বের করি সেটা হবে গড় বেগ! সেটা তাৎক্ষণিক প্রকৃত বেগ না। তোমাদের মাঝে যারা চালাক চতুর তারা মোটামুটি বুঝতে পারছ যে বেগটা আস্তে আস্তে বাড়ছে এবং সেই বেগটা বের করা

সম্ভব না! যারা আরো বেশি চালাক চতুর তারা অবশ্যি টেবিলটা দেখে অনুমান করতে পারবে যে অতিক্রান্ত দুরত্বের জন্যে একটা সূত্র বের করা যায় সেটা হচ্ছে:

$$S = 5t^2$$

এই সূত্রটা দিয়ে যে কোনো সময় t তে কতোটুকু দূরত্ব অতিক্রম করেছে সেটা বের করা যাবে, কিন্তু 2.5 s এ গাড়িটির বেগ কতো সেটা বের করায় কোনো উপায় নেই! কিন্তু তার বেগ কত সেটা বের করা যাবে না। যেরকম 2.5s শেষে অতিক্রান্ত দূরত্ব বের করা যাবে। সেটি হচ্ছে $S = 5(2.5)^2\,m = 31.25m$

কিন্তু তুমি যদি ক্যালকুলাস জানতে তাহলে চোখের পলকে বলে ফেলতে পারতে গাড়ির বেগ হচ্ছে

$$v = 10t$$

তখন 2.5 s এ কেন, যে কোনো সময়ের জন্যে গাড়ীটির বেগ বের করতে পারতে, এ রকম হাজার রকমের হাজারটা উদাহরণ দেয়া সম্ভব! কাজেই যারা বিজ্ঞান শিখতে চায় তাদের সবার ক্যালকুলাস শিখতে হয়।

2. কেমন করে হল?

অতিক্রান্ত দূরত্ব $S = 5t^2$ কেন বলা হয়েছিল সেটা আমরা হয়তো অনুমান করতে পারি কিন্তু বেগ v কেন $10t$ সেটা আমরা কেমন করে বের করেছি?

আসলে কাজটা মোটেও কঠিন নয়।

ব্যাপারটা ভাল করে বোঝার জন্যে আমরা প্রথমে অতিক্রান্ত দূরত্ব এবং সময়ের একটা গ্রাফ এঁকে ফেলি (1নং ছবি)।

ধরা যাক এই গ্রাফে t_1 সময়ে বেগ কতো আমরা সেটা বের করতে চাই।

আমার গ্রাফে দেখতে পাচ্ছি t_1 সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব S_1। এখন ধরা যাক t_1 এর কিছুক্ষণ পর অন্য একটি সময় t_2 তে অতিক্রান্ত দূরত্ব হচ্ছে S_2। কাজেই আমরা বলতে পারি t_1 এবং t_2 এর মাঝখানে গাড়িটার গড় বেগ হচ্ছে :

$$v = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$$

কিন্তু আমরা তো দুটো সময়ের ভেতরকার গড় বেগ করতে চাচ্ছি না আমরা যে কোনো একটা নির্দিষ্ট সময়ের (যেমন t_1) তাৎক্ষণিক বেগ বের করতে চাইছি।

এবারে আমরা t_1 এবং t_2 এর মাঝখানের সময়টাকে বলি Δ, অর্থাৎ

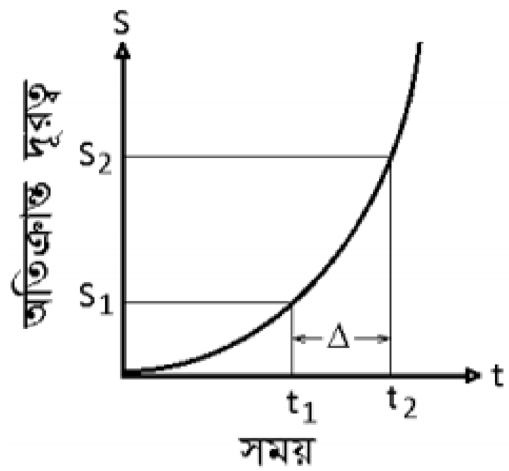
$$t_2 = t_1 + \Delta$$

তাহলে আমরা S_1 এবং S_2 কে নূতনভাবে লিখতে পারি। যেহেতু $S = 5t^2$ কাজেই

$S_1 = 5t_1^2$ এবং t_2 সময়ে

$$S_2 = 5t_2^2 = 5(t_1 + \Delta)^2 = 5(t_1^2 + 2t_1\Delta + \Delta^2)$$

কাজেই t_1 এবং t_2 সময়ের ভেতরকার গড়বেগ হচ্ছে



1 নং ছবি

$$v = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \frac{5(t_1^2 + 2t_1\Delta + \Delta^2) - 5t_1^2}{\Delta} = \frac{10t_1\Delta + 5\Delta^2}{\Delta}$$

কিংবা :

$$v = 10t_1 + 5\Delta$$

এখন তোমরা আবার গ্রাফটির দিকে তাকাও t_1 এবং t_2 এর মাঝখানের সময়টুকু হচ্ছে Δ, কাজেই t_2 কে যদি t_1 এর কাছাকাছি আনতে থাকি তাহলে Δ এর মানও ছোট হতে থাকবে।

আমরা আগেই বলেছি আমরা t_1 এবং t_2 এর ভেতরকার গড় বেগ বের করেছি। t_2 কে t_1 এর কাছে আনতে আনতে যদি সেটাকে হুবহু t_1 করে ফেলি তাহলে কী হবে? নিশ্চয়ই তখন সেই বেগটা আর গড়বেগ থাকবে না। সেটা t_1 এর তাৎক্ষণিক বেগ!

অর্থাৎ t_1 এ তাৎক্ষণিক বেগ বের করার জন্যে t_2 কে t_1 এর কাছে নিয়ে আসতে হবে।

অর্থাৎ Δ কে শূন্য করে ফেলতে হবে!

$$\Delta \to 0$$

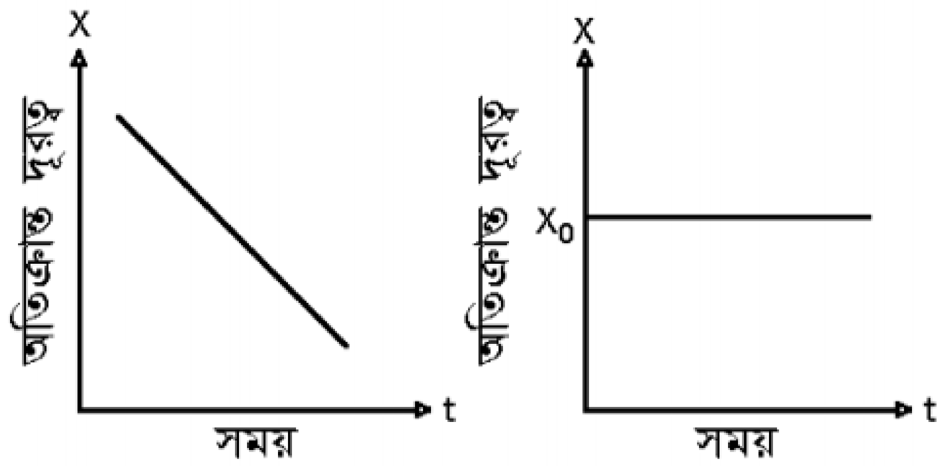
এবারে v এর সমীকরণে Δ এর মান শূন্য বসিয়ে দিলে আমরা পাব :

$$v = 10t_1$$

t_1 একটি নির্দিষ্ট সময় হলেও এটি যে কোনো সময়ের জন্যে সত্যি। কাজেই সাধারণভাবে লিখতে পারি:

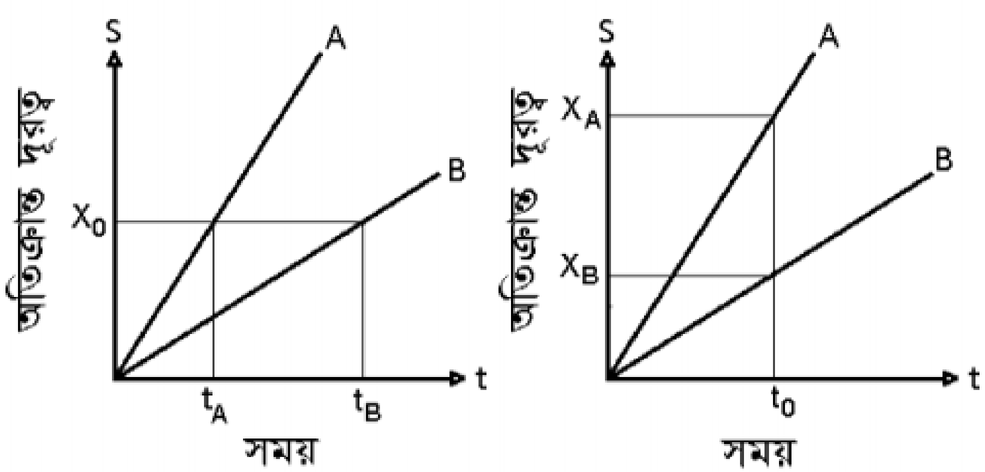
$$v = 10t$$

এখন পর্যন্ত যেটুকু করা হয়েছে সেটা যদি বুঝে থাকো তাহলে ধরে নেয়া যাবে তোমরা ক্যালকুলাস শিখে ফেলেছ! তোমরা ইচ্ছা করলে আর্কিমিডিসের মত ইউরেকা ইউরেকা বলে চিৎকার করে ঘর থেকে বের হয়ে যেতে পার– অবশ্যই জামা কাপড় পরে!



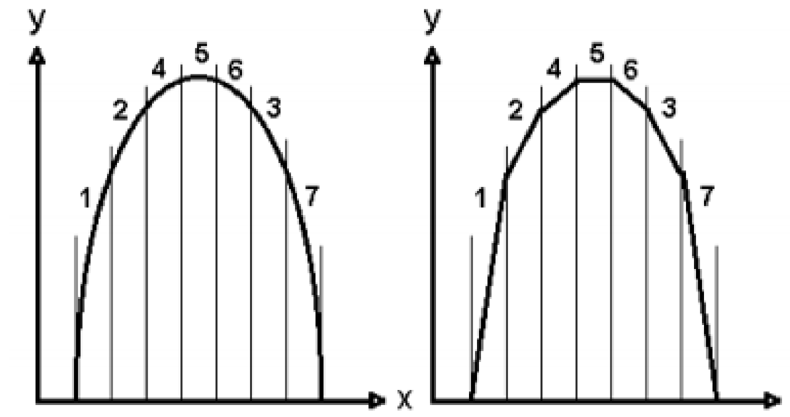
৩নং ছবি

শুধু একটা বিষয় লক্ষ্য কর, আমরা সবাই জানি কোনো কিছুকে শূন্য দিয়ে ভাগ করা যায় না। এখানে কিন্তু আমরা Δ দিয়ে ভাগ দিয়েছি। যখন ভাগ দিয়েছি তখন বলিনি $\Delta = 0$, সবকিছু শেষ করার পর বলেছি $\Delta \to 0$, তখন কিন্তু কোনো সমস্যা হয়নি।



3. পরিবর্তনের হার :

এতক্ষণ আমরা ক্যালকুলাসের উদাহরণ দিয়েছি, সত্যিকারের একটা সমস্যার সমাধানও করেছি। এবারে সমাধান করার জন্যে যে গণিতটুকু ব্যবহার করতে হয় তার কল কজাগুলোর সাথে পরিচিত হব!



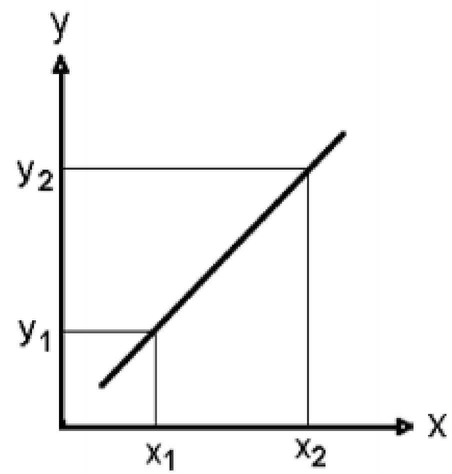
৪নং ছবি

প্রথমেই তোমাদের মনে করিয়ে দিই, আগের সমস্যাটিতে কোনো একটা বস্তুর অবস্থান দেয়া ছিল, সময়ের সাথে সেটি কীভাবে পরিবর্তিত হচ্ছিল সেই তথ্যটুকু দেয়া ছিল, সেখান থেকে আমরা বেগ বের করেছি। বেগ হচ্ছে সময়ের সাথে অবস্থানের পরিবর্তনের হার অর্থাৎ যদি সময়ের সাথে পরিবর্তনের হার বেশি হয় তাহলে বেগ বেশি, পরিবর্তনের হার কম হলে তার বেগ কম।

2নং ছবিতে দুটো বস্তু A এবং B এর সময়ের সাথে অবস্থানের পরিবর্তন দেখা হয়েছে। প্রথম ছবিতে আমরা দেখছি X_0 দূরত্ব অতিক্রম করতে A এবং B বস্তুর সময় লেগেছে t_A এবং t_B, যেহেতু t_B ছোট এবং t_A বড় তাহলে বলা যেতে পারে। একই দূরত্ব (X_0) B বস্তু A বস্তু থেকে আগে অতিক্রম করতে পারে। কাজেই B এর অবস্থানের পরিবর্তনের হার A থেকে বেশি কাজেই B এর বেগ বেশি। দ্বিতীয় ছবিতে দেখানো হয়েছে t_0 সময়ে A এবং B বস্তু X_A এবং X_B দূরত্ব অতিক্রম করেছে। যেহেতু X_B, X_A থেকে বেশি তাই বলতে পারব B এর অবস্থানের পরিবর্তনের হার বেশি অর্থাৎ B এর বেগ বেশি।

আমরা পবিরর্তনের হার শব্দটার সাথে পরিচিত হতে চাইছি তাই আরো দুটো উদাহরণ দেয়া যাক। ৩নং ছবির প্রথমটিতে t এর সাথে অবস্থান X কমে যাচ্ছে, তার পরিবর্তনের হার হচ্ছে নিগেটিভ।

দ্বিতীয় ছবিতে সময়ের সাথে অবস্থানের কোনো পরিবর্তনই হচ্ছে না যার অর্থ এখানে পরিবর্তনের হার শূন্য। এটি যদি একটি গাড়ীর অবস্থান-সময়ের গ্রাফ হয়ে থাকে তাহলে বুঝতে হবে গাড়ীটা X_0 জায়গায় চুপচাপ থেমে আছে।



৫নং ছবি

আগের উদাহরণগুলোতে পরিবর্তনের হার বোঝার কাজটুকু খুব সহজ ছিল কারণ প্রত্যেকটা উদাহরণে একটা করে সরল রেখা আঁকা হয়েছিল এবং সরল রেখার দিকে তাকালেই আমরা বুঝতে পারি সেটা কী ঢালু নাকী খাড়া, যত খাড়া হতে থাকবে পরিবর্তনের হার হবে তত বেশী। শুধু তাই নয় যেহেতু এগুলো সরল রেখা ছিল তাই অবস্থানের পরিবর্তন হলেও পরিবর্তনের হার সব সময়েই সমান। পরিবর্তনের হার কোনো সময়ে বেশি, কোনো সময়ে কম তা কিন্তু নয়।

কিন্তু পরিবর্তন যে সব সময়ে সমান হারে সরল রেখায় হবে তা কিন্তু নয়। আমরা বইয়ের শুরুতে যে উদাহরণটা দিয়েছি তাতে পরিবর্তন কিন্তু সরল রেখায় ছিল না! তাই পরিবর্তন সরল রেখায় না হলেও পরিবর্তনের হার আছে এবং সেটি একেক সময়ে একক রকম হওয়া সম্ভব। কোথাও বেশি কোথাও কম হতে পারে, কোথাও পজিটিভ কোথাও নিগেটিভ হতে পারে এমন কী কোথাও শূন্য হতে পারে। সে রকম হলে আমরা কী করব?

৪নং ছবিতে একটা উদাহরণ দেয়া হয়েছে যেটা মোটেই সোজা নয়, (আমরা আকাশের দিকে কিছু একটা ছুড়ে দিলে এটা এভাবে উপরে উঠে আবার নিচে নেমে আসতে পারে।) আমরা এটার জন্যে যদি পরিবর্তনের হারটুকু অনুভব করতে চাই তাহলে কী করব?

একটা উপায় হচ্ছে পুরো অংশটাকে অনেকগুলো ভাগ করে নেয়া তাহলে প্রত্যেকটা ভাগকেই মোটামুটি সরল রেখা মনে হবে। আমাদের ছবিতে আমরা সাতটা অংশে ভাগ করেছি এবং সাতটা সরল রেখা এঁকেছি। এখন প্রত্যেকটা সরল রেখার দিকে তাকিয়েই বলে দিতে পারব, সরল রেখাটার কোথায় ঢালু বা কোথায় খাড়া, কোথায় বাড়ছে এবং কোথায় কমছে বা কোথাও কোনো পরিবর্তন হচ্ছে না। ছবিটার দিকে তাকিয়েই বলে দিতে পারি :

1 এবং 7 : সবচেয়ে খাড়া, যদিও 1 এ এটা বাড়ছে কিন্তু 7 এ কমছে।

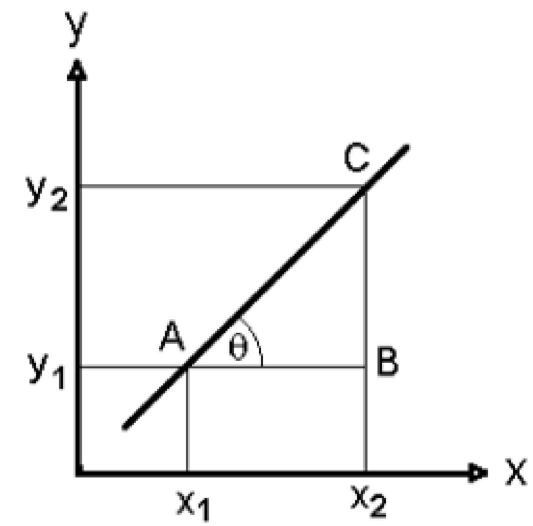
2 এবং 6 : মোটামুটি ঢালু, এখানে 2 এ বাড়ছে 6 এ কমছে।

3 এবং 5 : সবচেয়ে কম ঢালু, এখানে 3 এ বাড়ছে এবং 5 এ কমছে।

4 : কোনো পরিবর্তন হচ্ছে না।

একটা সরল রেখা কতোটুকু ঢালু সেটা মাপা খুব সহজ। ৫নং ছবিতে সেটা দেখানো হয়েছে। সরল রেখাটা যদি $x-y$ অক্ষে আঁকা হয় তাহলে সরল রেখার কতোটুকু ঢালু তার পরিমাণ হচ্ছে:

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$



৬নং ছবি

এই পরিমানটাকে গণিতের ভাষায় Slope বলে আমরা এটার বাংলা করেছি ঢাল। কাজেই ছবিতে দেখানো সরলরেখার ঢাল যদি m দিয়ে প্রকাশ করি তাহলে

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

আমরা অন্যভাবেও ঢাল বের করতে পারি।

সরল রেখাটির দুটি বিন্দু দিয়ে একটা সমকোণী ত্রিভূজ ABC আঁকতে পারি (৬নং ছবি)। আমরা এই মাত্র দেখেছি ঢালের সংজ্ঞা অনুযায়ী

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{BC}{AB}$$

ABC ত্রিভূজের $\angle ABC$ হচ্ছে সমকোণ তাই আমরা ত্রিকোনোমিতি ব্যবহার করে লিখতে পারি;

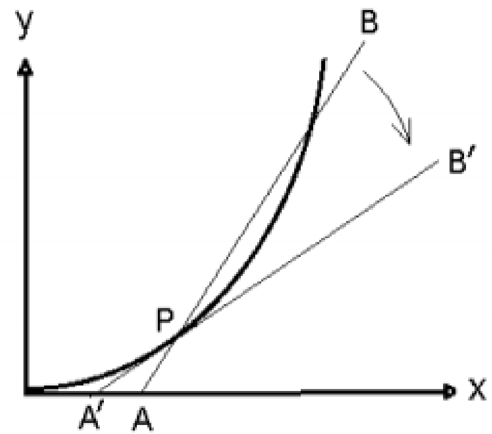
$$tan\theta=\frac{লম্ব}{ভূমি}=\frac{BC}{AB}$$

অর্থাৎ ঢাল $m = tan\theta$

কাজেই একটা সরল রেখার ঢাল বা Slope হচ্ছে ভূমির সাথে যে কোণ করেছে তার Tangent!!

ধরা যাক আগের উদাহরণে সাতটি অংশের m_1 থেকে m_7 পর্যন্ত সাতটি ঢাল। কাজেই আগের উদাহরণটির জন্য বলতে পারি:

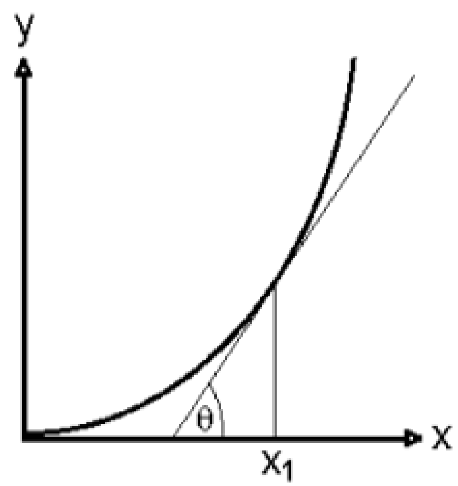
$$m_1 > m_2 > m_3 > m_4 = 0 > m_5 > m_6 > m_7$$



৭নং ছবি

আমরা সবাই দেখতে পাচ্ছি, মাত্র সাতটা ভাগ করার কারণে ৪নং ছবির দ্বিতীয় অংশটি পুরোপুরি প্রথম ছবির মত হয়নি! হওয়ার কথাও নয়– সরল রেখা দিয়ে বাঁকা রেখা আঁকা যায় না! বোঝাই যাচ্ছে আমরা যদি সাতটি ভাগে ভাগ না করে, 14টি ভাগে ভাগ করতাম তাহলে সেটা আরো ভালো ভাবে প্রথম ছবির কাছাকাছি হত, তবে তখন রেখাটির 14টি জায়গায় 14টি ঢাল থাকত।

14টি না হয়ে 28 হলে আরো ভালো হত, 56 হলে আরো ভালো হত, এভাবে বাড়াতে বাড়াতে অসীম সংখ্যক হলে পুরোপুরি মিলে যেতো! যখন সংখ্যাটি অসীম তখন সেই ছোট থেকে ছোট সরল রেখাটি কী রকম? একটু চিন্তা করলেই দেখবে সেটি তখন রেখাটির সেই বিন্দুতে স্পর্শক (tangent) ! বিষয়টা ভালো করে বোঝানোর জন্যে একটা বাঁকা রেখাকে যখন



৮নং ছবি

ছোট ছোট সরল রেখা দিয়ে উপস্থাপন করা হয়েছিল সে রকম একটি ছোট সরলরেখা AB নিই (৭নং ছবি)।

রেখাটি ইচ্ছে করে একটু বড় করে আঁকা হয়েছে যেন x অক্ষকে A বিন্দুতে ছেদ করে। এটা বাঁকা রেখাটাকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে। এখন কল্পনা কর AB রেখার P বিন্দুটি ঠিক রেখে B টাকে B' এর দিকে ঠেলে দেয়া হচ্ছে। স্বাভাবিক ভাবেই A বিন্দুতে তখন A' এর দিকে সরে যাবে। যদি রেখাটি এমনভাবে ঠেলে দেয়া যায় যে সেটি শুধুমাত্র P বিন্দুতে স্পর্শ করবে অন্য কোথাও নয় তখন $A'B'$ রেখাটি হবে P বিন্দুতে বাঁকা রেখাটির স্পর্শক। P বিন্দুতে পরিবর্তনের হার হচ্ছে এই স্পর্শক $A'B'$ এর ঢাল!

অর্থাৎ যদি কোনো কোনো একটা পরিবর্তনশীল রাশির পরিবর্তনের হার কোনো এক ধরনের রেখা দিয়ে আঁকি (৮নং ছবি) তাহলে কোনো একটা X_1 বিন্দুতে পরিবর্তনশীল রাশির পরিবর্তনের হার হচ্ছে সেই বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল, ছবিতে যে রকম দেখানো হয়েছে! স্পর্শক একটা সরলরেখা, আমরা তার ঢাল বের করা জানি! সরল রেখাটি যদি ভূমির সাথে θ কোণ করে থাকে তাহলে ঢাল m হচ্ছে

$$m = tan\theta$$

4. আসল ক্যালকুলাস :

এবারে আমরা আসল ক্যালকুলাস শুরু করে দিতে পারি! ধরা যাক একটি ফাংশন $f(x)$ আমরা তার পরিবর্তনের হার বের করতে চাই। $f(x)$ কী ধরনের ফাংশন তার উপর নির্ভর করবে কোণ x এ $f(x)$ এর পরিবর্তনের হার কত। কোথাও সেটি বেশি কোথাও কম হতে পারে – এবং সেটা আমরা অন্য একটা অন্য একটা ফাংশন দিয়েও প্রকাশ করতে পারি।

আমরা এখন পরিবর্তনের হার বের করা শিখে গেছি, গ্রাফ পেপারে ফাংশনটি আঁকা গেলে যে বিন্দুতে পরিবর্তনের হার বের করতে চাই সেই বিন্দুতে একটা স্পর্শক এঁকে তার ঢাল বের করে নিতাম। কিন্তু আমরা নির্দিষ্ট একটা x বিন্দুতে পরিবর্তনের হার বের না করে এমনভাবে সেটা সেটা বের করতে চাই যেন সব x এর জন্যেই সেটা সত্যি হতে পারে।

আমরা x এবং $x + \Delta$ এই দুটি মানের জন্যে ফাংশনটির মান বের করতে পারব, সেটি হবে $f(x)$ এবং $f(x + \Delta)$। কাজেই

$f(x)$ এর পরিবর্তন হচ্ছে

$$f(x + \Delta) - f(x)$$

এবং $f(x)$ এর পরিবর্তনের হার হচ্ছে

$$\frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta}$$

এখন আমরা Δ কে ছোট করতে করতে প্রায় শূন্য করে ফেলতে পারি সেটা আমরা বোঝব এভাবে:

$$\lim_{\Delta\to 0}$$

কাজেই $f(x)$ এর পরিবর্তনের হার হচ্ছে

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta}$$

এটাকে লেখা হয় এভাবে

$$\frac{df(x)}{dx}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta}$$

মুখে বলার সময় আমরা এটাকে বলি x এর সাপেক্ষে ফাংশন $f(x)$ এর ডিফারেন্সিয়েশন!

মনে রাখতে হবে এটা কিন্তু df এবং dx এর ভাগফল নয়, এটা হচ্ছে একটা প্রক্রিয়া যেটা $f(x)$ এর উপর প্রয়োগ করা হচ্ছে। আমরা দুভাবে লিখতে পারি $\frac{df(x)}{dx}$ কিংবা $\frac{d}{dx}f(x)$

এবারে তাড়াতাড়ি কয়েকটা উদাহরণ দেয়া যাক।

(i) $f(x)=x^2$

$$\frac{df(x)}{dx}=?$$

$$\frac{dx^2}{dx}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{(x+\Delta)^2-x^2}{\Delta}$$
$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{x^2+2x\Delta+\Delta^2-x^2}{\Delta}$$
$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{2x\Delta+\Delta^2}{\Delta}$$
$$=\lim_{\Delta\to 0}2x+\Delta$$

কাজেই : $\frac{dx^2}{dx}=2x$

(ii) $f(x)=x^3$

$$\frac{df(x)}{dx}=?$$

$$\frac{dx^3}{dx}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{(x+\Delta)^3-x^3}{\Delta}$$
$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta+3x\Delta^2+\Delta^3-x^3}{\Delta}$$
$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{3x^2\Delta+3x\Delta^2+\Delta^3}{\Delta}$$
$$=\lim_{\Delta\to 0}3x^2+3x\Delta+\Delta^2$$

কাজেই : $\frac{dx^2}{dx}=3x^2$

(iii) $f(x)=x^n$

$$\frac{df(x)}{dx}=?$$

$$\frac{dx^n}{dx}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{(x+\Delta)^n-x^n}{\Delta}$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{x^n+nx^{n-1}\Delta+\frac{n(n-1)}{n}x^{n-2}\Delta^2+\cdots\Delta^n-x^n}{\Delta}$$

এখানে আমরা $(x+\Delta)^n$ এর Binomial expansion করেছি (পরিশিষ্ট)।

$$\frac{dx^n}{dx}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{nx^{n-1}\Delta+\frac{n(n-1)}{n}x^{n-2}\Delta^2+\cdots\Delta^n}{\Delta}$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{n}x^{n-2}\Delta+\cdots\Delta^{n-1}$$

এখানে প্রথম দুটো পদ লেখা হয়েছে, পরের পদগুলোতে Δ^2, Δ^3 এভাবে থাকবে। যখন $lim\Delta\to 0$ করা হবে তখন প্রথম পদ ছাড়া অন্য সবগুলো শূন্যতে পরিণত হবে। কাজেই

$$\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$$

যদিও এটা করা হয়েছে পজিটিভ n এর জন্যে কিন্তু এটা নিগেটিভ n কিংবা ভগ্নাংশ n এর জন্যেও সত্যি!

(iv) $f = \sin\theta$ $\quad \frac{df(\theta)}{d\theta} = ?$

$$\frac{d sin\theta}{d\theta} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{sin(\theta+\Delta) - sin\theta}{\Delta}$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{sin\theta cos\Delta + cos\theta sin\Delta - sin\theta}{\Delta}$$

আমরা এবার $cos\Delta$ এবং $sin\Delta$ এর সিরিজ দুটি (পরিশিষ্ট) ব্যবহার করতে পারি।

$$cos\Delta = 1 - \frac{\Delta^2}{2!} + \frac{\Delta^4}{4!} \ldots$$

$$sin\Delta = \Delta - \frac{\Delta^3}{3!} + \frac{\Delta^5}{5!} \ldots$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{sin\theta\left(1 - \frac{\Delta^2}{2!} + \frac{\Delta^4}{4!}\ldots\right) + cos\theta\left(\Delta - \frac{\Delta^3}{3!} + \frac{\Delta^5}{5!}\ldots\right) - sin\theta}{\Delta}$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} cos\theta - \frac{1}{2}sin\theta\Delta + \frac{1}{6}cos\theta\Delta^2 \ldots$$

অর্থাৎ $\frac{d sin\theta}{d\theta} = cos\theta$

(v) $f = \cos\theta$ $\quad \frac{df(\theta)}{d\theta} = ?$

$$\frac{d cos\theta}{d\theta} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{cos(\theta+\Delta) - cos\theta}{\Delta}$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{cos\theta cos\Delta - sin\theta sin\Delta - cos\theta}{\Delta}$$

আমরা আবার $cos\Delta$ এবং $sin\Delta$ এর জন্যে সিরিজ দুটি ব্যবহার করি। যেহেতু $\Delta\to 0$ কাজেই প্রথম এক-দুটি পদ নেয়াই যথেষ্ট।

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{cos\theta\left(1 - \frac{\Delta^2}{2!} + \frac{\Delta^4}{4!}\ldots\right) - sin\theta\left(\Delta - \frac{\Delta^3}{3!} + \frac{\Delta^5}{5!}\ldots\right) - cos\theta}{\Delta}$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} - sin\theta - \frac{1}{2}cos\theta\Delta + \frac{1}{6}sin\theta\Delta^2 \ldots$$

অর্থাৎ $\quad \frac{d cos\theta}{d\theta} = -sin\theta$

(vi) $f(x) = C$ একটি ধ্রুবক বা constant. $\quad \frac{df(x)}{dx} = ?$

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta}$$

যেহেতু x এর মানের জন্যেই $f(x) = C$ কাজেই

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{C - C}{\Delta}$$

$$\frac{dC}{dx} = 0$$

অর্থাৎ কোন ফাংশন যদি পরিবর্তন না হয় তাহলে তার ডিফারেন্সিয়েশন শূন্য।

(vii) $f(x) = e^x$ $\quad \frac{df(x)}{dx} = ?$

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta}$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{e^{(x+\Delta)} - e^x}{\Delta}$$

$$= e^x \lim_{\Delta\to 0}\frac{e^\Delta - 1}{\Delta}$$

আমরা e^Δ এর জন্যে সিরিজটি লিখতে পারি,

$$e^\Delta = 1 + \frac{\Delta^2}{2!} + \frac{\Delta^3}{3!} + \cdots$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{e^\Delta - 1}{\Delta} = 1$$

কাজেই $\quad \frac{de^x}{dx} = e^x$

আমি সবাইকে বলব এই ডিফারেন্সিয়েশনটাকে ভালো করে দেখতে। e^x হচ্ছে এমন একটা চমকপদ ফাংশন যার পরিবর্তনের হার ভিন্ন আরেকটি ফাংশন নয় – পরিবর্তনের হার হচ্ছে সেই একই ফাংশন!

অনুশীলনী

1.-4. ছবিতে দেখানো চারটি ফাংশনের ডেরাইভেটিভ কেমন হবে ঠিক নিচে সেটি এঁকে দেখাও।

5. ডেরাইভেটিভ বের কর: $f(x) = x^3 + 3x - 6$

6. ডেরাইভেটিভ বের কর: $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

7. ডেরাইভেটিভ বের কর: $S(t) = ut + \frac{1}{2}at^2$

8. $f(x) = 2x^3$ এর $x = 3$ তে ডেরাইভেটিভ কত?

9. একটি দেশের জনসংখ্যা $y = 10t + t^2$ হিসেবে বাড়ছে। যখন $t = 100$ তখন জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার কতো?

10. $y = 5x^2 + 2x + 3$ উপবৃত্তের $x = 1$ এবং $x = -1$ এ ঢাল কত?

5. কিছু গুরুত্বপূর্ণ থিওরেম

1. একটি ধ্রুবকের (C)ডিফারেন্সিয়েশান হচ্ছে শূন্য : $\frac{d}{dx}C = 0$

2. একটি ধ্রুব এবং একটি ফাংশনের গুণফলের ডিফারেন্সিয়েশন হচ্ছে ধ্রুব এবং ফাংশনের ডিফারেন্সিয়েশনের গুণফল। $\frac{d}{dx}(Cf(x)) = C\frac{d}{dx}f(x)$

3. দুটি ফাংশনের যোগ এবং বিয়োগফলের ডিফারেন্সিয়েশন হচ্ছে দুটি ফাংশনের ডিফারেন্সিয়েশনের যোগ এবং বিয়োগফল।

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$
$$\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

4. দুটি ফাংশনের গুণফলের ডিফারেন্সিয়েশন হচ্ছে :

$$\frac{d}{dx}f(x) \times g(x) = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

অর্থাৎ প্রথম ফাংশন × দ্বিতীয় ফাংশনের ডিফারেন্সিয়েশন + দ্বিতীয় ফাংশন × প্রথম ফাংশনের ডিফারেন্সিয়েশন।

5. দুটি ফাংশনের ভাগফলের ডিফারেন্সিয়েশন হচ্ছে :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}$$

অর্থাৎ (ভাজ্য × ভাজকের ডিফারেন্সিয়েশন − ভাজক × ভাজ্যের ডিফারেন্সিয়েশন) ÷ ভাজকের বর্গ

এই পাচঁটি থিওরেম প্রমাণ করতে পারবে?

প্রথমটা প্রমাণ করা হয়ে গেছে অন্যগুলো এমন কিছু কঠিন নয়, চেষ্টা করে দেখ!

ধরে নিচ্ছি আমরা $\frac{dy}{dx}$ বা পরিবর্তনের হার বিষয়টা বুঝেছি, কেমন করে সেটা বের করা যায় সেটাও শিখে ফেলেছি।

আমরা যেহেতু প্রক্রিয়াটা জেনেছি এবারে বেশ কিছু ফাংশনের উপর প্রয়োগ করে দেখি।

এবারে কিছু উদাহরণ:

(i) $f(x) = \sqrt{x}$আমরা সরাসরি লিখে ফেলি:

$$\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta} - \sqrt{x}}{\Delta}$$

উপরে নিচে $\sqrt{x+\Delta} + \sqrt{x}$ দিয়ে গুণ করা যাক

$$\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{x + \Delta - x}{\Delta\left(\sqrt{x+\Delta} + \sqrt{x}\right)}$$
$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta} + \sqrt{x}}$$
$$\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

অর্থাৎ তোমাদের নিশ্চয়ই মনে আছে। আমরা আগে দেখিয়েছিলাম,

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

এখানে $n = \frac{1}{2}$ বসালেও আমরা একই উত্তর পাব :

$$\frac{dx^{\frac{1}{2}}}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2. $f(x) = \log x$

$$\frac{d}{dx}logx = \lim_{\Delta\to 0}\frac{\log(x+\Delta) - logx}{\Delta}$$

কিন্তু আমরা জানি

$$logAB = logA + logB$$

$$log\frac{A}{B} = logA - logB$$

কাজেই আমরা লিখতে পারি :

$$\frac{d}{dx}logx = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}log\left(\frac{x+\Delta}{x}\right) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{log\left(1+\frac{\Delta}{x}\right)}{\Delta}$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{log(1+z)}{xz}$$

ধরে নিই $z = \frac{\Delta}{x}$ তাহলে লিখব $\frac{d}{dx}logx = \lim_{z\to 0}\frac{log(1+z)}{xz}$

লক্ষ কর যেহেতু $\lim_{\Delta\to 0}$ আমরা লিখতে পারি $\lim_{z\to 0}$

আমরা এখন এই সিরিজটি ব্যবহার করতে পারি

$$\log(1+z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots$$

$$\frac{d}{dx}logx = \frac{1}{x}\lim_{z\to 0}\left(1 + \frac{z}{2} + \cdots\right)$$

$$\frac{d}{dx}logx = \frac{1}{x}$$

6. ফাংশনের ফাংশনকে ডিফারেন্সিয়েশন:

একটা ফাংশনকে আমরা ডিফারেন্সিয়েশন করতে শিখেছি – কিন্তু অনেক সময়েই দেখা যায় শুধু এটুকু জানলেই কাজ হয় না আরো কিছু জানতে হয়। যেমন ধরা যাক আমরা $\sin x$ কে ডিফারেন্সিয়েশন করে পাই $\cos x$, কেমন করে পাই সেটাও জানি। কিন্তু ধরা যাক আমরা ডিফারেন্সিয়েশন করতে চাই $\sin x^2$ তখন কী করব? অর্থাৎ

$$y = f(v)$$

$$v = f(x)$$

তাহলে $\frac{dy}{dx} = ?$

যদি $y = \sin x^2$ এর উদাহরণটি নেই তাহলে লিখব

$$y = \sin v$$

$$v = x^2$$

বিষয়টা আসলে খুবই সোজা তার কারণ:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dv}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)$$

ইচ্ছে করলে খুব সহজেই আমরা বের করতে পারব কেন $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$, আপাতত; আমরা তোমাদের উপর সেটা ছেড়ে দিই! আমরা এটা ব্যবহার করে অগ্রসর হই।

কাজেই $y = \sin x^2$ এর বেলায় :

$$\frac{d}{dx}\sin x^2 = \left(\frac{d}{dv}\sin v\right)\left(\frac{dx^2}{dx}\right) = \cos v \times 2x = 2x\cos x^2$$

এবারে কয়েকটা উদাহরণ করা যাক :

(i) $y = e^{x^2}$

এটাকে লেখা যায়: $y = e^v$

$$v = x^2$$

$$\text{কাজেই } \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dv}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right) = \left(\frac{de^v}{dv}\right)\left(\frac{dx^2}{dx}\right) = e^v 2x$$

$$\frac{de^{x^2}}{dv} = 2xe^{x^2}$$

(ii) $y = \sin^4 x$ এটাকে লেখা যায় : $y = v^4$

$$v = \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dv}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right) = \left(\frac{dv^4}{dv}\right)\left(\frac{d\sin x}{dx}\right) = 4v^3\cos x$$

$$\frac{d\sin^4 x}{dx} = 4\sin^3 x\cos x$$

(iii) $y = \log\sqrt{x}$

আমরা লিখতে পারি:

$$y = \log v$$

কাজেই $$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dv}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right) = \left(\frac{d\log v}{dv}\right)\left(\frac{d\sqrt{x}}{dx}\right) = \frac{1}{v}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x}$$

(iv)) $y = \sqrt{x^2 + a^2}$

আমরা লিখতে পারি:

$$y = \sqrt{v}$$
$$v = x^2 + a^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dv}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right) = \left(\frac{d\sqrt{v}}{dv}\right)\left(\frac{d\,(x^2 + a^2)}{dx}\right) = \frac{1}{2\sqrt{v}}2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

এবারে আমরা একটুখানি মজা করতে পারি!

আমরা জানি $y = f(u)$ এবং $u = f(x)$ হলে $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$

আমরা যদি লিখি: $y = f(x)$

$x = f(y)$ তাহলে?

বোঝাই যাচ্ছে তাহলে লিখতে পারব

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right) = \left(\frac{dy}{dy}\right) = 1$$

অর্থাৎ

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right) = 1$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}$$

তোমরা হয়তো ভাবতে পার এটা করে আমাদের লাভ কী? কিন্তু এক্ষুনি দেখবে কখনো কখনো $\frac{dy}{dx}$ বের করা জটিল কিন্তু $\frac{dx}{dy}$ করা সোজা, তখন $\frac{dx}{dy}$ বের করে

(i) $y = sin^{-1}x$

এটাকে সরাসরি ডিফারেন্সিয়েট না করে আমরা লিখি:

$$x = siny$$

তাহলে $\frac{dx}{dy} = cosy = \sqrt{1 - sin^2y} = \sqrt{1 - x^2}$

আমরা জানি $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}$

তার মানে $\frac{dsin^{-1}x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(i) $y = tan^{-1}x$

আগের মত আবার লিখতে পারি $x = tan\,y$

$$\frac{dx}{dy} = sec^2y = 1 + tan^2y = 1 + x^2$$

আমরা জানি $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}$

কাজেই $\frac{d\,tan^{-1}x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

7. ইমপ্লিসিট ফাংশান (Implicit Function):

মাঝে মাঝে আমরা এমন সমীকরণ পেয়ে যাই যেখানে y এবং x কে আলাদা করা কঠিন কিংবা অসম্ভব। তখন কী $\frac{dy}{dx}$ বের করা সম্ভব? একটা পদ্ধতি তোমাদের শিখিয়ে রাখা যায়। যেটা হয়তো কাজে লাগবে। যেমন ধরা যাক দেয়া আছে :

$x^3 - xy^2 + 3y^2 + 2 = 0$ তাহলে $\frac{dy}{dx}$ = কত?

আমাদের মনে হতে পারে হয়তো এভাবে চেষ্টা করতে হবে:

$$xy^2 - 3y^2 = x^3 + 2$$

$$y^2 = \frac{x^3 + 2}{x - 3}$$

কিংবা

$$y = \sqrt{\frac{x^3 + 2}{x - 3}}$$

তারপর এটাকে আমরা ডিভারেন্সিয়েশন করতে পারি। যথেষ্ট জটিল কিন্তু করা অসম্ভব নয়। আসলে এটা আরো অনেক সহজে করা সম্ভব। আমরা সরাসরি সমীকরণটির প্রত্যেকটা পদকে আলাদা ভাবে ডিফারেন্সিয়েট করতে পারি।

$$\frac{d}{dx}(x^3 - xy^2 + 3y^2 + 2) = 0$$
$$\frac{d}{dx}x^3 - \frac{d}{dx}xy^2 + \frac{d}{dx}3y^2 + \frac{d}{dx}2 = 0$$
$$3x^2 - x(2y)\frac{dy}{dx} - y^2 + 3(2y)\frac{dy}{dx} = 0$$

কাজেই

$$\frac{dy}{dx}(6y - 2xy) = y^2 - 3x^2$$

আমরা জানি

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 3x^2}{6y - 2xy}$$

কতো সহজ দেখেছ! ইচ্ছে করলে এখানে তুমি y এর মান বসিয়ে পুরোটা x এর ফাংশন হিসেবেও লিখতে পার!

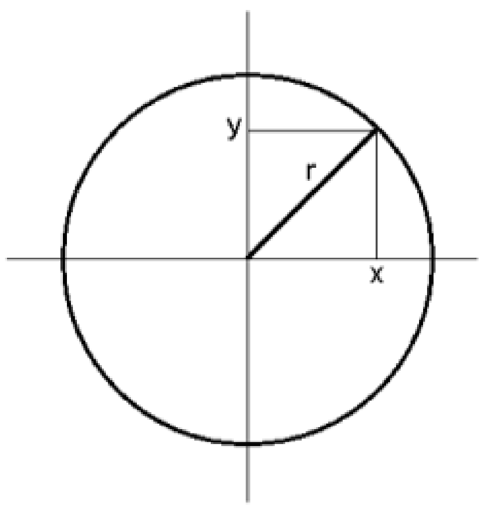
ii) বৃত্তের সমীকরণ হচ্ছে (৯নং ছবি):

$$x^2 + y^2 = r^2$$

যেখানে r হচ্ছে বৃত্তের ব্যসার্ধ। কাজেই লিখতে পারি

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

আমরা এখানেও একইভাবে $\frac{dy}{dx}$ বের করতে পারি:



৯নং ছবি

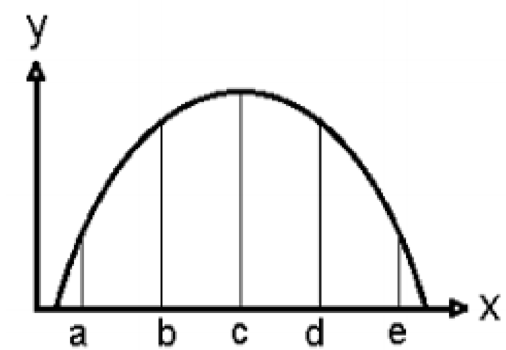
$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2 - r^2) = 0$$
$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

বৃত্তটার দিকে তাকিয়ে তুমি মিলিয়ে দেখ এটা তোমার ধারনার সাথে মিলে কী না। x = r হলে $\frac{dy}{dx}$ কতো হওয়া উচিত? y = r হলে কতো হওয়া উচিত? x = -r, কিংবা y = -r হলে কী হওয়া উচিত?

অনুশীলনী

ডেরাইভেটিভ বের কর।

1. $f(z) = (z^2 + 6)^7$
2. $f(x) = \sqrt{log\, x}$
3. $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
4. $f(\theta) = log\, sin\theta$
5. $f(\theta) = \sqrt{log\, sin\theta}$



১০নং ছবি

8. ফাংশনের সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান :

ক্যালকুলাস যতোগুলো মজার বিষয় আছে তার মাঝে একটা হচ্ছে একটা ফাংশনের সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান বের করা। ১০ নং ছবিতে একটা ফাংশন দেয়া আছে দেখাই যাচ্ছে ফাংশনটার মান বাড়তে বাড়তে সর্বোচ্চ হয়ে তারপর আবার কমতে শুরু করেছে।

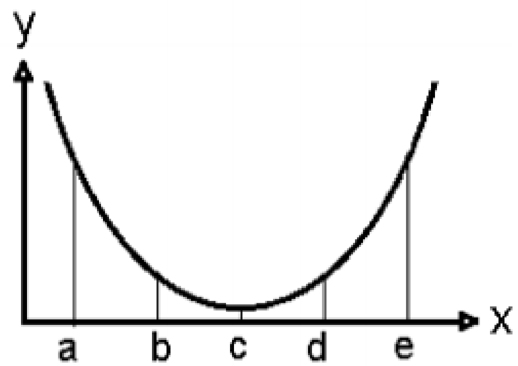
আমরা যেটুকু ক্যালকুলাস শিখেছি সেখান থেকে খুব সহজেই বলতে পারব এই ফাংশনটা a বিন্দুতে বাড়ছে, কাজেই এখানে $\frac{dy}{dx}$ এর মান পজিটিভ। b তে মান আরেকটু কমে c তে শূন্য হয়ে গেছে। c থেকে $\frac{dy}{dx}$ কমতে শুরু করেছে অর্থাৎ d তে $\frac{dy}{dx}$ এর মান নিগেটিভ এবং c তে আরো বেশি নিগেটিভ মান পাব!

ছবিটির দিকে তাকিয়ে থাকলেই পুরো ব্যাপারটা স্পষ্ট হয়ে যায়। কোনো কিছু বাড়তে বাড়তে যখন সর্বোচ্চ মানে পৌছায় তখন আর বাড়তে পারে না, তখন মানটি কমতে শুরু করে। ডিফারেন্সিয়েশন যেহেতু পরিবর্তনের হার, সর্বোচ্চ মানে তার পরিবর্তন হয় না, তাই সেখানে $\frac{dy}{dx}$ এর মান শূন্য!

কাজেই আমরা বলতে পারি একটা ফাংশনের মান কোথায় সর্বোচ্চ, সেটা বের করা খুবই সোজা, দেখতে হবে কোথায় তার ডিফারেন্সিয়েশানের মান শূন্য। অর্থাৎ কোথায় $\frac{dy}{dx} = 0$

যুক্তিতে কোনো ভুল নেই কিন্তু একটা সমস্যা আছে। সেটা হচ্ছে এই পুরো যুক্তিটা সর্ব নিম্ন মানের জন্যেও সত্যি। বিশ্বাস না হলে ১১নং ছবিটি দেখ।

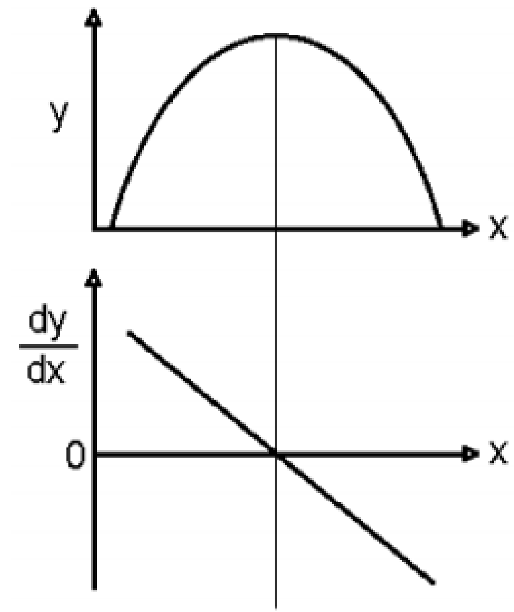
এই ছবিতে দেখানো হয়েছে y এর মান a, b তে কমতে কমতে c তে পৌছে আর পরিবর্তিত হচ্ছে না। সেখানে $\frac{dy}{dx} = 0$,আবার c পার হওয়ার পর y এর মান বাড়তে শুরু করেছে। যেহেতু c বিন্দুতে মান সর্বনিম্ন তাই ঠিক সেখানে y এর কোনো পরিবর্তন হচ্ছে না অর্থাৎ এখানে $\frac{dy}{dx} = 0$



১১নং ছবি

কাজেই ব্যাপারটা কী এরকম দাড়াল যে, যদি $\frac{dy}{dx} = 0$ হয় তাহলে আমরা বলতে পারব, ফাংশন y এর মান সেখানে হয় সর্বোচ্চ, না হয় সর্বনিম্ন কিন্তু এটি কোনটি সেটা বলা সম্ভব না?

হতাশ হওয়ার কিছু নেই, $\frac{dy}{dx} = 0$ থেকে আমরা হয়তো তার থেকে বেশি কিছু বলতে পারব না, কিন্তু আরেকটু বিশ্লেষণ করলেই আমরা পরিস্কার বলতে পারব সেটা কী সর্বোচ্চ নাকী সর্বনিম্ন! সেটা বোঝার জন্যে আমরা ১২নং এবং ১৩নং ছবিতে সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন দুটোর জন্যেই y এর সাথে সাথে $\frac{dy}{dx}$ টুকুও দেখানো যাক!



১২নং ছবি

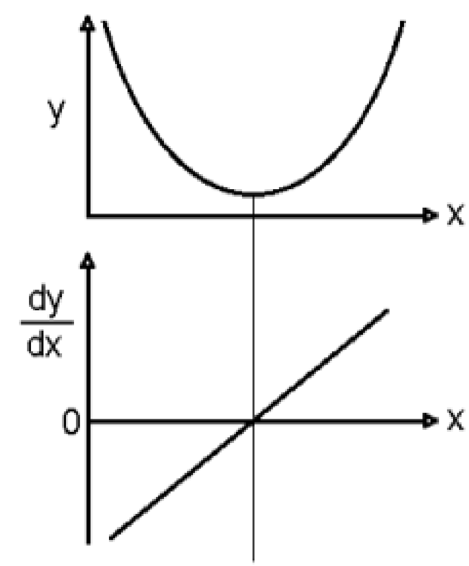
শুধু $\frac{dy}{dx}$ রেখাটি যেখানে 0 কে ছেদ করেছে (অর্থাৎ যেখানে $\frac{dy}{dx} = 0$) সেই বিন্দুতে y হয় সর্বোচ্চ কিংবা সর্বনিম্ন কিন্তু $\frac{dy}{dx}$ রেখাটি দেখে আমরা একটু মজার বিষয় বুঝতে পারলাম, যখন y এর মান সর্বোচ্চ, তখন $\frac{dy}{dx} = 0$ এবং $\frac{dy}{dx}$ রেখাটি নিচের দিকে নামছে (১২নং ছবি)।

আবার যখন y এর মান সর্ব নিম্ন তখন $\frac{dy}{dx} = 0$ হলেও $\frac{dy}{dx}$ রেখাটি উপরের দিকে উঠছে (১৩নং ছবি)। কাজেই $\frac{dy}{dx}$ রেখাটি উপরের উঠছে নাকি নিচের দিকে নামছে যেখান থেকে আমরা বুঝে যাব y ফাংশনটি সর্বোচ্চ নাকি সর্বনিম্ন।

রেখাটি উপরের দিকে উঠছে নাকী নিচের দিকে নামছে সেটা আমরা কেমন করে বুঝব?

খুবই সোজা! একটা রেখা যদি নিচের দিকে নামে তাহলে তার পরিবর্তনের হার নিগেটিভ, যদি রেখাটি উপরের দিকে উঠছে তাহলে তার পরিবর্তনের হার পজিটিভ। অর্থাৎ $\frac{df}{dx}$ কে যদি আবার ডিভারেন্সিয়েট করা হয় তাহলে সর্বোচ্চের বেলায় নিগেটিভ, সর্বনিম্নের বেলায় পজিটিভ।

একটা পরিবর্তনশীল ফাংশনের f যদি সর্বোচ্চ মান থাকে তাহলে সেই বিন্দুতে



১৩নং ছবি

$$\frac{df}{dx} = 0 \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) < 0$$

আবার পরিবর্তনশীল একটা ফাংশন f এর যদি সর্বনিম্ন মান থাকে তাহলে সেই বিন্দুতে

$$\frac{df}{dx} = 0 \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) > 0$$

ক্যালকুলাসের জগতে দুই কিংবা দুইয়ের বেশিবার সহজভাবে ডিফারেন্সিয়েট করাকে সহজভাবে লেখার নিয়ম :

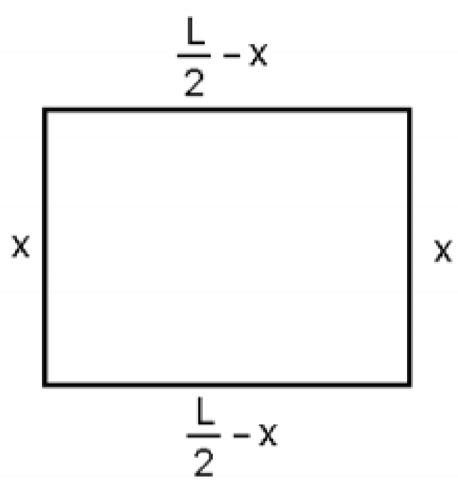
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) = \frac{d^3 f}{dx^3}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d^n f}{dx^n}$$ ইত্যাদি।

এবারে আমরা সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মানের কয়েকটা উদাহরণ করে দেখাই।

i) ধরা যাক তোমার কাছে L দৈর্ঘ্যের এক টুকরো সূতা রয়েছে। তোমাকে বলা হয়েছে এটাকে দিয়ে এমন একটা আয়তক্ষেত্র তৈরি করতে যেন আয়াতক্ষেত্রটার ক্ষেত্রফল হয় সবচেয়ে বেশি।



১৪নং ছবি

কীভাবে তৈরী করবে? ১৪নং ছবিতে আমার L দৈর্ঘ্যের একটা সূতা দিয়ে আয়াতক্ষেত্র তৈরি করে দেখিয়েছি।

এখানে আয়াতক্ষেত্রের চার বাহু যোগ করলে আমরা পাই L, কাজেই আমাদের x এর মান কতো হবে সেটা বের করতে হবে।

আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, $S(x) = x\left(\frac{L}{2} - x\right) = \frac{Lx}{2} - x^2$

সবচেয়ে বড় ক্ষেত্রফলের জন্যে $\frac{dS(x)}{dx} = 0$

অর্থাৎ $\frac{d}{dx}\left(\frac{Lx}{2} - x^2\right) = 0$

$\frac{L}{2} - 2x = 0$

$x = \frac{L}{4}$

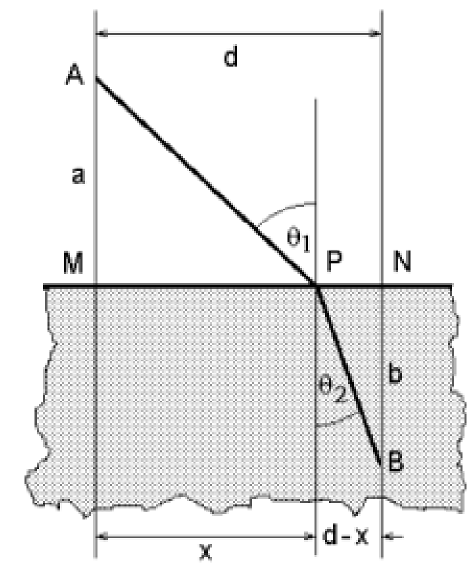
অর্থাৎ আমরা যদি বর্গক্ষেত্র তৈরী করি তাহলে সেটির ক্ষেত্রফল হবে সবচেয়ে বড়।

(ii) ১৫নং ছবিতে দেখানো হয়েছে A বিন্দুতে থেকে আলো এসে B বিন্দুতে পৌছেছে। A বিন্দুটি বাতাসে এবং B বিন্দুটি পানিতে, আলোটি কোন পথে A থেকে B তে পৌছাবে?

ধরা যাক আলোক রেখাটি A থেকে P এবং P থেকে B বিন্দুতে পৌছাবে। ধরা যাক A থেকে পানির পৃষ্ঠে লম্বের উচ্চতা a, B থেকে পানির পৃষ্ঠের দূরত্ব b এবং M থেকে N এর দুরত্ব d। ধরা যাক পানির প্রতিসারাংক হচ্ছে n. কাজেই বাতাসে আলোর বেগ হবে c হলে পানির আলোর বেগ হবে $\frac{c}{n}$

(যারা এটি জানতে না তারা জেনে নাও, এটা হচ্ছে প্রতিসারাংকের সংজ্ঞা)

কাজেই A থেকে B তে যেতে আলোক রশ্মির কতোটুকু সময় লাগবে বের করার জন্যে দূরত্বকে সেখানকার বেগ দিয়ে ভাগ দিতে হবে।



১৫নং ছবি

অর্থাৎ
$$t = \frac{AP}{c} + \frac{PB}{\frac{c}{n}}$$

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c} + \frac{\sqrt{a^2 + (d-x)^2}}{\frac{c}{n}}$$

আলো A থেকে B তে যাবে সবচেয়ে কম সময়ে! কাজেই x বিন্দুটি এমন একটি জায়গায় হবে যেন t হয় ক্ষুদ্রতম অর্থাৎ

$$\frac{dt}{dx} = 0$$

কাজেই লিখতে পারি:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c}+\frac{\sqrt{a^2+(d-x)^2}}{\frac{c}{n}}\right)=0$$

$$\frac{1}{2c}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)(2x)+\frac{n}{2c}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+(d-x)^2}}\right)(-2x)=0$$

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=n\frac{x}{\sqrt{a^2+(d-x)^2}}$$

ত্রিকোণোমিতির নিয়ম থেকে এটাকে এভাবে লিখতে পারি,

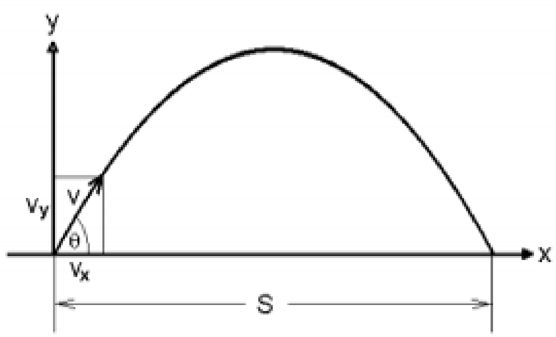
$$cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)=n\,cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_2\right)$$

$$n=\frac{sin\theta_1}{sin\theta_2}$$

যেটি আসলে প্রতিসারাংকের সূত্র! কী বিস্ময়ের ব্যাপার শুধু গণিত ব্যবহার করে পদার্থবিজ্ঞানের সূত্র বের করে ফেলেছি!

ইচ্ছে করলে ঠিক একইভাবে প্রতিফলনের সূত্রটাও বের করা সম্ভব। চেষ্টা করে দেখ।

(iii) ধরা যাক ভূমির সাথে θ কোণ করে একটা বস্তু উপরের দিকে ছুড়ে দেয়া হয়েছে (১৬নং ছবি) θ এর মান কতো হলে এটা সবচেয়ে দূরে যাবে?



১৬নং ছবি

ধরা যাক বস্তুটাকে v বেগে ভূমির সাথে θ কোণে পাঠানো হয়েছে। আমরা এখানে v বেগটাকে দুটি ভাগ করতে পারি একটা ভূমির সাথে সমান্তরাল v_x, আরেকটি লম্ব v_y

$$v_x=v\,cos\theta$$
$$v_y=v\,sin\theta$$

$v\,cos\theta$ এর কোনো পরিবর্তন হবে না কারণ x দিকে কোনো বল নেই যেটা v_x এর পরিবর্তন করতে পারে। কিন্তু v_y পরিবর্তন হবে কারণ নিচের দিকে মাধ্যকর্ষণ বলের জন্যে এখানে একটা ত্বরণ g রয়েছে।

কাজেই উপরের দিকে অতিক্রান্ত দূরত্ব h এর জন্যে লিখতে পারি

$$h=v_yt-\frac{1}{2}gt^2$$

বস্তুটি ছুড়ে দেবার পর এটি কতক্ষণ ছুটে যাবে এটা এই সূত্র থেকে বের করা সম্ভব। শুরুতে $h = 0$ ছিল, পুরো দূরত্বটুকু অতিক্রম করার সময় উপরে উঠে আবার নিচে নেমে $h = 0$ হয়ে যাবে। কাজেই t বের করার জন্যে আমরা লিখব:

$$h=v_yt-\frac{1}{2}gt^2=0$$

$$t\left(v_y-\frac{1}{2}gt\right)=0$$

এর দুটো সমাধান। একটি $t = 0$, যেটা শুরুতে সত্যি।

আবার যখন

$$t=\frac{2v_y}{g}=\frac{2v\,sin\theta}{g}$$

অর্থাৎ যখন নিচে নেমে আসবে।

কাজেই সমান্তরাল দিকে মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব:

$$S=v_xt=v\,cos\theta\left(\frac{2v\,sin\theta}{g}\right)=\frac{2v^2cos\theta sin\theta}{g}$$

যারা ত্রিকোনিমিতি জান তারা বলতে পারবে যে

$$2cos\theta sin\theta=sin2\theta$$

কাজেই ভূমির সাথে সমান্তরাল অতিক্রান্ত দূরত্ব:

$$S=\frac{v^2sin2\theta}{g}$$

দেখতেই পাচ্ছ θ এর মানের উপর নির্ভর করবে এটা কতো দূরত্ব অতিক্রম করবে। যেমন $\theta = 0$ হলে অর্থাৎ খাড়া উপরের দিকে ছুড়ে দিলে কোনো দূরত্বই অতিক্রম করবে না। আবার θ এর একটি মান থাকতে পারে যখন এটা সবচেয়ে বেশি দূরত্ব অতিক্রম করবে।

θ এর কোন মানের জন্যে এটা সবচেয়ে বেশি দূরত্ব অতিক্রম করবে সেটা বের করার জন্যে আমরা লিখতে পারি :

$$\frac{dS}{d\theta} = 0$$

অর্থাৎ

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{v^2 sin2\theta}{g}\right) = \frac{2v\, cos2\theta}{g} = 0$$

কিংবা

$$cos2\theta = 0$$

কাজেই আমরা জানি এটা সত্যি হতে পারে যখন

$$2\theta = 90^\circ$$

অর্থাৎ ভূমির সাথে 45° কোনে ছুড়ে দেয়া হলে বস্তুটি সবচেয়ে দূরে গিয়ে পড়বে!

ডিফারেন্সিয়েশনে মোটমুটি কাজ চালানোর মত তথ্য দেয়া হয়েছে। বিষয়টা যদি সত্যি সত্যি শিখতে চাও তাহলে এখন সমস্যাগুলো করতে শুরু কর!

অনুশীলনী

1. x এর কোন মানের জন্যে নিচের ফাংশনটির সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান রয়েছে?

$$f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$$

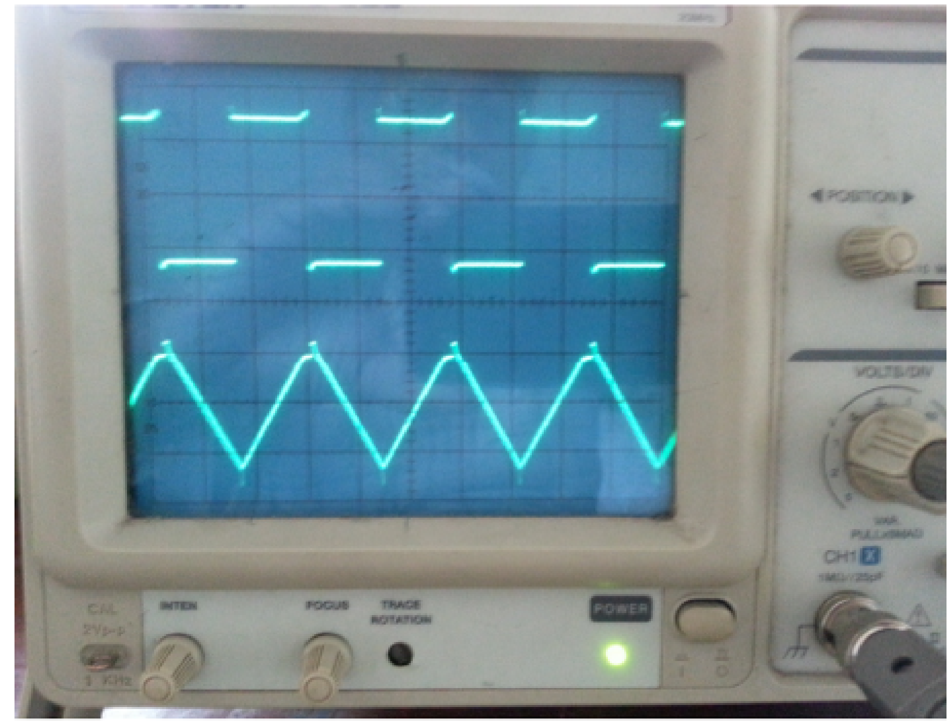
2. θ এর কোন মানের জন্যে $sin\theta$ এর সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান রয়েছে?

3. একটা বল u বেগে উপরের দিকে ছুড়ে দিলে তার উচ্চতা হবে $h = ut - \frac{1}{2}gt^2$, কোন সময়ে এটি সর্বোচ্চ উচ্চতায় পৌছাবে? সেই উচ্চতাটুকু কত?

4. দেখাও $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 3$ ফাংশনের সর্বোচ্চ কিংবা সর্বনিম্ন মান নেই!

5. দেখাও $x + \frac{1}{x}$ এর সর্বোচ্চ মান সর্বনিম্ন মান থেকে কম!

ইন্টিগ্রেশান



ইলেকট্রনিক্স সার্কিট দিয়ে ইন্টিগ্রেট করা উপরের ফাংশনটির ইন্টিগ্রেশান নিচে।

1. ডিফারেন্সিয়েশানের বিপরীত প্রক্রিয়া

আমরা ডিফারিন্সেয়াল ক্যালকুলাস শিখেছি। যার অর্থ একটা ফাংশান দেয়া হলে তার ডিফারেন্সিয়েশন বের করা শিখেছি। যদি সত্যিই এটা শিখে থাকি তাহলে বলা যেতে পারে আমরা আসলে ইন্টেগ্রেশানও শিখে গেছি, কারণ ইন্টেগ্রেশান হচ্ছে ডিফারেন্সিয়েশানের বিপরীত প্রক্রিয়া, আর কিছু নয়। অর্থাৎ যদি

$$\frac{df(x)}{dx} = g(x)$$

তাহলে $g(x)$ কে ইন্টেগ্রেট করলে আমরা পাব $f(x)$. ইন্টেগ্রেশান লেখার একটা নিয়ম আছে, সেই নিয়ম দিয়ে যদি লিখতে চাই তাহলে লিখতে হবে এভাবে

$$\text{যদি } \frac{df(x)}{dx} = g(x)$$

তাহলে

$$\int g(x)dx = f(x)$$

কেন এভাবে লেখা হয়েছে আমরা একটু পরেই সেটাও খুটিয়ে খুটিয়ে দেখব, আপাতত মেনে নাও!

অর্থাৎ যদি

$$f(x) = x^3$$

তাহলে, আমরা জানি

$$\frac{df(x)}{dx} = 3x^2$$

কাজেই আমরা বলতে পারি

$$\int 3x^2dx = x^3$$

কিংবা আরেকটু গুছিয়ে লিখতে পারি

$$\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3$$

সাধারণভাবে বলতে পারি

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

কাজেই কোনো কিছু চিন্তা না করেই আমরা এখন বেশ কয়েকটা ইন্টেগ্রেশান লিখে ফেলতে পারি :

$$\int sinxdx = -cosx$$

$$\int cosxdx = sinx$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \frac{1}{x}dx = logx$$

কোনো কিছু চিন্তা না করে বেশিক্ষণ কাজ চালিয়ে যাওয়া ঠিক হবে না।

এবারে এক সেকেন্ডের জন্যে একটু চিন্তা করা যাক। ধরা যাক আমার ফাংশানটা শুধু x^3 নয় সেটি হচ্ছে

$$f(x) = x^3 + 5$$

তাহলে আমরা জানি

$$\frac{df(x)}{dx} = 3x^2$$

আবার যদি হয়

$$f(x) = x^3 - 9$$

তাহলেও আমরা জানি

$$\frac{df(x)}{dx} = 3x^2$$

সংগত কারণেই একই উত্তর এসেছে।

কিন্তু আমরা বলেছি একটা ফাংশন $f(x)$ কে ডিফারেন্সিয়েট করে যদি $g(x)$ পাই তাহলে $g(x)$ কে ইন্টেগ্রেট করে আমরা $f(x)$ পেয়ে যাব। তাহলে $3x^2$ কে ইন্টেগ্রেট করে আমরা কোনটা পাব $3x^2 + 5$ নাকী $3x^2 - 9$?

একটু চিন্তা করলেই বুঝতে পারবে শুধু +5 কিংবা -9 নয় এখানে যে কোনো অপরিবর্তনীয় মানের (constant) জন্যেই এটা সত্যি। কাজেই ঝামেলাটুকু মেটানোর জন্যে আমরা লিখি

$$\int 3x^2dx = x^3 + C$$

যেখানে C একটা ধ্রুব সংখ্যা বা এই ধ্রুব সংখ্যা C এর মান আমাদের জানা নেই, এটা সমস্যার উপরে নির্ভর করবে। কখনো এটা শূন্য হতে পারে অন্য কিছুও হতে পারে। ইন্টিগ্রেশন প্রক্রিয়া এর মান বলে দিতে পারবে না। কাজেই এবারে

আগে কোনোরকম চিন্তা না করে যেগুলো লিখেছিলাম সেগুলো আবার নূতন করে লিখি।

$$\int sinxdx = -cosx + C$$

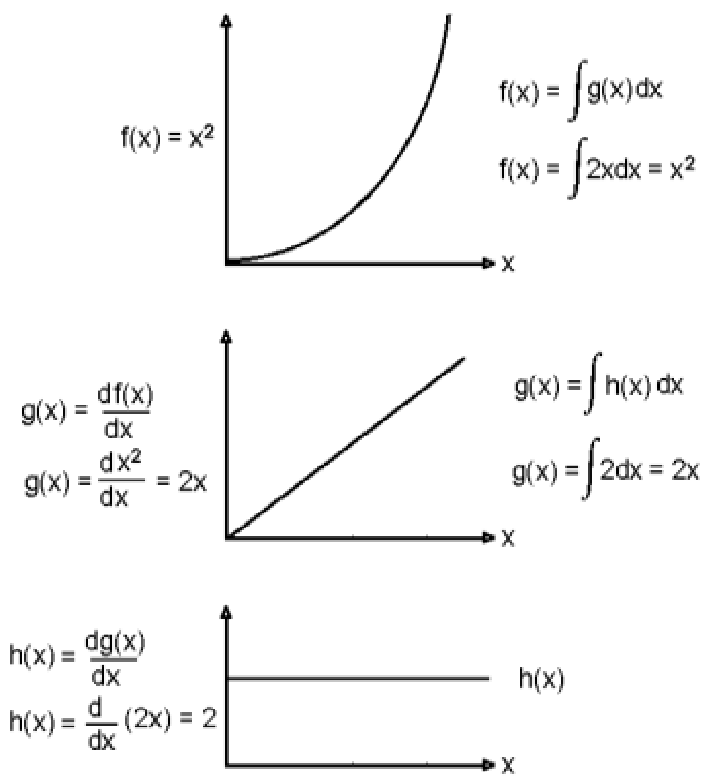
$$\int cosxdx = sinx + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$\int \frac{1}{x} dx = logx + C$ ইত্যাদি ইত্যাদি!

2. অন্যভাবে ইন্ট্রিগেশন :

ডিফারেন্সিয়েশান টুকু বোঝার পর আমরা যদি জেনে যাই যে ইন্টেগ্রেশান হচ্ছে ডিফারেন্সিয়েশনের বিপরীত প্রক্রিয়া তাহলেই কিন্তু ইন্টেগ্রেশানের যাবতীয় সমস্যা



১৭নং ছবি

করে ফেলা যায়। তার কারণ পৃথিবীর সব সম্ভাব্য অসম্ভাব্য ফাংশনের ইন্টেগ্রেশান পাওয়া যায়, শুধু তাই নয় ফাংশনের ইন্টেগ্রেশানের সফটওয়্যার আছে। কাজেই কেউ যদি শুধু ব্যবহার করতে চায় তাহলে বেশি কিছু না জেনেই এটা ব্যবহার শুরু করে দিতে পারে। কিন্তু আমরা বিষয়টা একটু বুঝতেও চাই। প্রথমেই ১৭নং ছবিটি দেখানো যায়, এখানে উপরে একটি ফাংশন দেখানো হয়েছে, মাঝখানে তার ডিফারেন্সিয়াল এবং নিচে সেই ডিফারেন্সিয়ালের ডিফারেন্সিয়েশন দেখানো হয়েছে! কাজেই উপরেরটি x^2, মাঝেরটি $2x$ এবং নিচেরটি 2।

$f(x)=x^2$

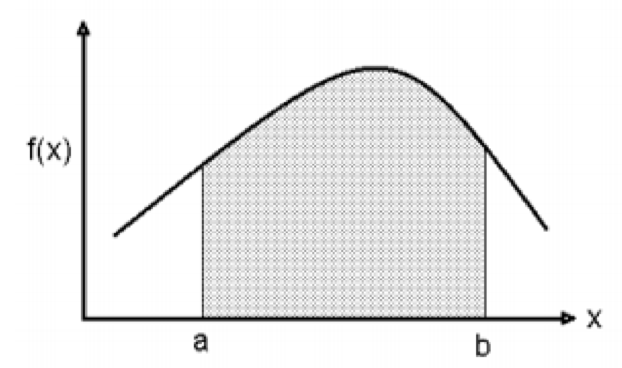
$$\frac{df(x)}{dx} = g(x) = 2x$$

$$\frac{d^2f(x)}{dx} = \frac{dg(x)}{dx} = h(x) = 2$$

এবারে ছবির এই তিনটি প্রক্রিয়া উপর থেকে নিচে না দেখে নিচের থেকে উপরে দেখার চেষ্টা করি! প্রথম ফাংশনটি সহজ $h(x) = 2$ সেটাকে ইন্টেগ্রেট করে পেয়েছি দ্বিতীয়টি যেটি হচ্ছে $g(x) = 2x$ এবং সেটাকে ইন্টেগ্রেট করে পেয়েছি $f(x) = x^2$

এবারে দেখা যাক কোন প্রক্রিয়াটি দিয়ে আমরা নিচের $h(x) = 2$ থেকে উপরের $g(x) = 2x$ পেয়েছি।

প্রক্রিয়াটি খুবই সহজ! গ্রাফটির দিকে তকালেই বুঝতে পারব $h(x) = 2$ রেখাটিতে রেখার নিচে আবদ্ধ জায়গাটুকু একটা আয়াতক্ষেত্র, তার এক বাহু 2, অন্যাবাহু x এবং এর ক্ষেত্রফল হচ্ছে $2x$! যার অর্থ একটা ফাংশনকে যদি একটা রেখা দিয়ে প্রকাশ করা হয় তাহলে রেখার নিচের আবদ্ধ জায়গাটুকুর ক্ষেত্রফলই হচ্ছে তার ইন্টিগ্রেশন।



১৮নং ছবি

আমাদের পর্যবেক্ষণ যে সত্যি সেটা ছবিতে মাঝের ফাংশনটির দিকে তাকালেই বুঝতে পারব! এখানে ফাংশনটি হচ্ছে $g(x) = 2x$ এবং এটাকে ইন্টিগ্রেট করলে আমাদের পাওয়ার কথা x^2.

আমরা যদি রেখাটির দিকে তাকাই তাহলে দেখব রেখাটির নিচে আবদ্ধ জায়গাটুকু হচ্ছে একটা সমকোণী ত্রিভুজ, যার ভূমি হচ্ছে x এবং লম্ব হচ্ছে $2x$. কাজেই এর ক্ষেত্রফল হচ্ছে $\frac{1}{2}x.2x = x^2$ ঠিক যেটা আমরা অনুমান করেছিলাম!

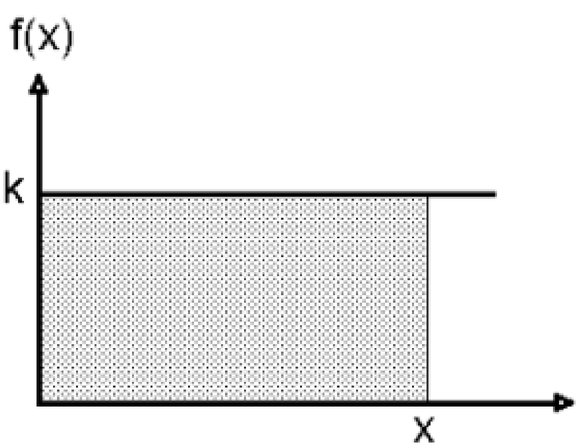
ডিফারেন্সিয়েশানের বেলায় ছিল একটি রেখার স্পর্শকের ঢাল। ইন্টিগ্রেশনের বেলায় সেটি হচ্ছে রেখার নিচে আবদ্ধ জায়গার ক্ষেত্রফল!

ডিফারেন্সিয়াল শেখার সময় আমরা নানা ধরনের রেখা এঁকে দেখিয়েছি একটা ফাংশনকে যদি একটা রেখা দিয়ে প্রকাশ করা যায় তাহলে ফাংশনের কোনো জায়গায় ডিফারেন্সিয়েশান করার অর্থ রেখাটির কোনো বিন্দুতে স্পর্শক বের করা। আগের চ্যাপ্টারে দেখিয়েছি একটা ফাংশনকে রেখা হিসেবে আঁকা হলে তার নিচের আবদ্ধ জায়গা টুকুর ক্ষেত্রফল হচ্ছে ইন্টিগ্রেশন। ১৮নং ছবিতে সেটা বের করে দেখানো যাক।

আমরা সোজা থেকেও সোজা একটা ফাংশন ধরে নিই, সেটা হচ্ছে ফাংশনটির মান হচ্ছে অপরিবর্তিত ধ্রুবক (১৯নং ছবি)!

$$f(x) = k$$

যদি এটাকে আমরা রেখা হিসেবে আঁকতে চাই তাহলে রেখাটি x অক্ষের সমান্তরাল একটা সরল রেখা। আমরা এই সরল রেখার x পর্যন্ত অংশটুকুতে $f(x)$ দিয়ে আবদ্ধ জায়গার ক্ষেত্রফল বের করতে চাই।



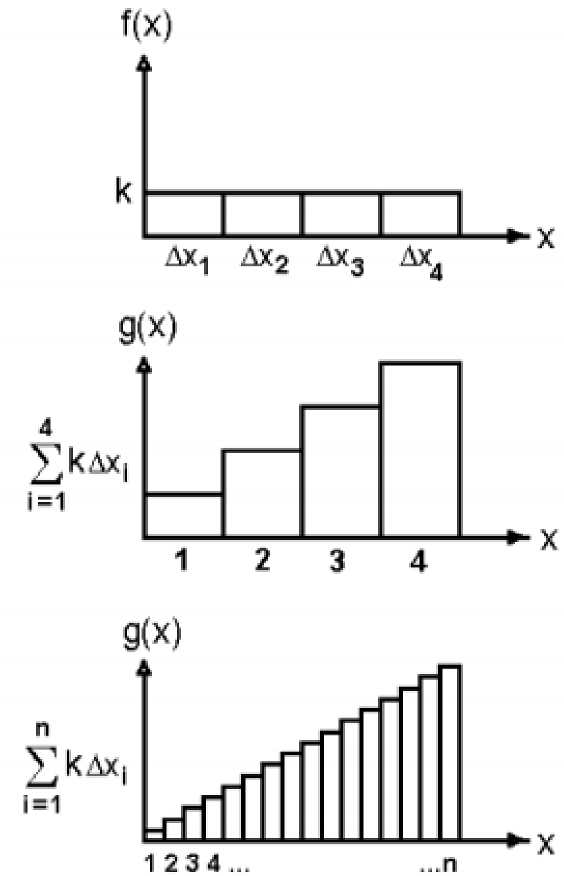
১৯ নং ছবি

তোমরা নিশ্চয়ই মুচকি হেসে বলছ এটা আর কঠিন কী? খুবই সোজা! দাগ দেয়া অংশটুকু হচ্ছে একটা আয়তক্ষেত্র, তার এক বাহু হচ্ছে k অন্য বাহু হচ্ছে x, কাজেই আবদ্ধ জায়গাটুকু হচ্ছে kx, আমরা ক্ষেত্রফলটুকু আরেকটা ফাংশন $g(x)$ দিয়ে প্রকাশ করতে পারি। অর্থাৎ

$$f(x) = k$$
$$g(x) = kx$$

ধরে নেয়া যাক এই খুবই সহজ বিষয়টা আমরা জানি না, তাই আমরা নিজেদের বুদ্ধি ব্যবহার করে ক্ষেত্রফল $g(x)$ করতে চাই।

একটা সহজ উপায় হচ্ছে 0 থেকে x পর্যন্ত অংশগুলোকে Δx_1, Δx_2, Δx_3 এ রকম ছোট ছোট অনেকগুলো অংশে ভাগ করা (২০নং ছবি) প্রতিটি অংশে এক বাহু হচ্ছে k এবং অন্য বাহু হচ্ছে Δx_1 কিংবা Δx_2 ইত্যাদি।



২০ নং ছবি

তারপর সবগুলো যোগ করে ফেললেই আমরা ক্ষেত্রফল পেয়ে যাব। অর্থাৎ

$$g(x) = k\Delta x_1 + k\Delta x_2 + k\Delta x_3 + R\Delta x_4$$

অনেকগুলো এরকম পদ যোগ করার একটা বিশেষ চিহ্ন আছে সেটা ব্যবহার করে লিখতে পারি

$$g(x) = \sum_{i=1}^{4} k\Delta x_i$$

(যারা এই চিহ্নটি আগে দেখনি তাদের জন্যে দুটো উদাহরণ দিচ্ছি:

ধরা যাক $S = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots n$

লিখতে পারি

$$S = \sum_{i=1}^{n} i$$

আমরা জানি

$$e^x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

লিখতে পারি

$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ ইত্যাদি।)

২০নং ছবিতে উপরে আমরা প্রথমে চারটা অংশে ভাগ করে দেখিয়েছি এভাবে নেয়া হলে আমরা শুধুমাত্র x এর চারটি মানের জন্যে ক্ষেত্রফল বের করতে পারব। দেখাই যাচ্ছে $g(x)$ যেন চার ধাপের সিড়ি! পরের ছবিতে আমরা n সংখ্যক ভাগে ভাগ করেছি, $g(x)$ এর মান x এর n সংখ্যক মানের জন্যে বের করতে পারব।

আমরা যদি n এর মান অসীম সংখ্যায় নিয়ে যাই তাহলে $g(x)$ টি হয়ে যাবে একটা সরল রেখা এবং তখন x এর যে কোনো মানের জন্যে $g(x)$ বের করতে পারব।

অর্থাৎ

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} R\Delta X_i$$

$g(x)$টি যেন n ধাপের সিড়ি তবে সিড়িগুলোর ধাপ ছোট ছোট!

অর্থাৎ n কে যদি অসীমে নিচে যায় তাহলে $\Delta x = \frac{x}{n}$ কে লিখব dx এবং $\sum$ কে লিখব $\int$

কাজেই

$$\Delta x = \frac{x}{n}$$
$$\lim_{n\to\infty} \Delta x \to dx$$
$$\lim_{n\to\infty} \sum \to \int$$

এবারে আমরা একটা উদাহরণ করে দেখি!

উদাহরণ: একটি বস্তুর ত্বরণ a, t সময় পরে সেটি কতো দূরত্ব অতিক্রম করবে?

ত্বরণ হচ্ছে বেগের পরিবর্তনের হার, অর্থাৎ

$$a = \frac{dv}{dt}$$

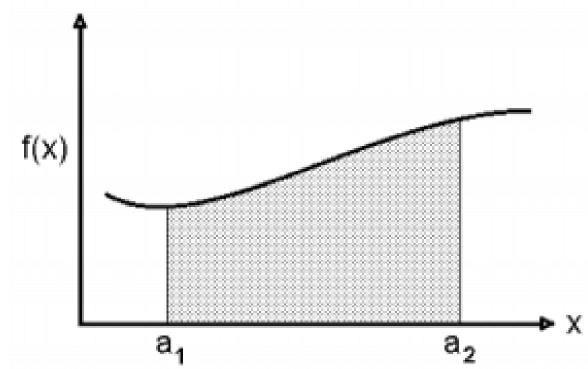
লিখতে পারি $dv = adt$

দুই পাশে ইন্টেগ্রেট করি

$$\int dv = \int adt$$
$$v = at + C$$

দুই পাশের দুটি constant লেখা এবং যেকোনো এক পাশে একটি constant লেখা একই কথা!

$t = 0$ সময়ে যদি বেগ v এর একটি মান থাকে সেটাকে বলে আদি বেগ। আমরা যদি সেটাকে u দিয়ে প্রকাশ করি তাহলে $t = 0$ ব্যবহার করে পাই



২১নং ছবি

$$u = C$$

অর্থাৎ

$$v = u + at$$

আমরা জানি সময়ের সাথে অবস্থানের s পরিবর্তনের হার হচ্ছে বেগ। কাজেই

$$v = \frac{ds}{dt}$$
$$ds = vdt$$

দুই পাশে ইন্টেগ্রেট করে

$$\int ds = \int vdt$$

আবার আগের মত একটি constant $s = \int (u + at)dt = ut + \frac{1}{2}at^2 + C$

যদি ধরে নিই $t = 0$ সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = 0$ এবারে তাহলে এবারে $C = 0$

অর্থাৎ

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

তোমরা যারা গতির সমীকরণ করেছ তারা অনেক কাঠখড় পুড়িয়ে আগে এটা বের করেছ! এখন সোঁজা।

3. ডেফিনিট ইন্টেগ্রাল :

ইন্টেগ্রেশানের একটা বড় ব্যবহার হচ্ছে ডেফিনিট ইন্টেগ্রাল। বিষয়টা বোঝার একটা সহজ উপায় হচ্ছে একটা রেখার নিচে নির্দিষ্ট একটা অংশের আবদ্ধ অংশটুকুর ক্ষেত্রফল বের করা (২১নং ছবি)।

ইন্টিগেশান বোঝার জন্যে এর আগেও আমরা রেখার নিচে আবদ্ধ জায়গার ক্ষেত্রফল বের করেছি কিন্তু কখনোই নির্দিষ্ট মান বসিয়ে দিইনি। ডেফিনিট ইন্টিগ্রালে মান বসিয়ে দিতে হয় তখন সেটা আর ফাংশন থাকে না– কোনো এক ধরণের পরিমাণ হয়ে যায়।

ধরা যাক ছবিতে দেখানো

$x = a_1$ থেকে $x = a_2$ পর্যন্ত আমরা ইন্টেগ্রেট করতে চাই।

আমরা এটা লিখব এভাবে

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x)dx$$

যদি

$$\int f(x)dx = g(x)$$

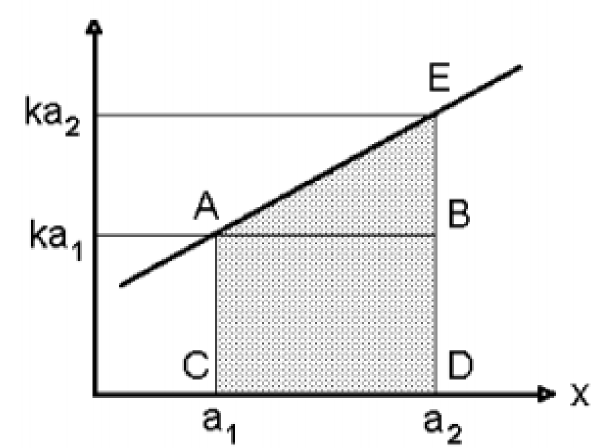
হয় তাহলে বোঝাই যাচ্ছে আমরা বের করতে চাই

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x)dx = g(x)\Big|_{a_1}^{a_2} = g(a_2) - g(a_1)$$

বোঝাই যাচ্ছে ডেফিনিট ইন্টেগ্রাল করে যেহেতু আমরা x এর মান বসিয়ে দিই তাই সেটি আসলে এটি x এর ফাংশন থাকে না, এটির একটি সুনির্দিষ্ট মান থাকে, কয়েকটা উদাহরণ দিলেই বিষয়টা পরিষ্কার হয়ে যাবে।

(i) ধরা যাক ২২নং ছবিতে দেখাদনো $y = kx$ রেখাটির a_1 থেকে a_2 পর্যন্ত ডেফিনিট ইন্ট্রেগ্রাল বের করতে চাই। সেটা যদি A হয় তাহলে আমরা লিখব

$$A = \int_{a_1}^{a_2} kxdx = \frac{kx^2}{2}\Big|_{a_1}^{a_2} = \frac{ka_2{}^2}{2} - \frac{ka_1{}^2}{2}$$



২২ নং ছবি

$$A = \frac{k}{2}(a_2{}^2 - a_1{}^2)$$

আমরা যদি জ্যামিতি ব্যবহার করে সরল রেখাটির নিচের a_1 থেকে a_2 অংশের ভেতরের ক্ষেত্রফল A বের করতে চাই তাহলে লিখব

$$A = A_1 + A_2$$

যেখানে A_1 হচ্ছে $ABCD$ আয়তক্ষেত্র এবং A_2 হচ্ছে ABE ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।

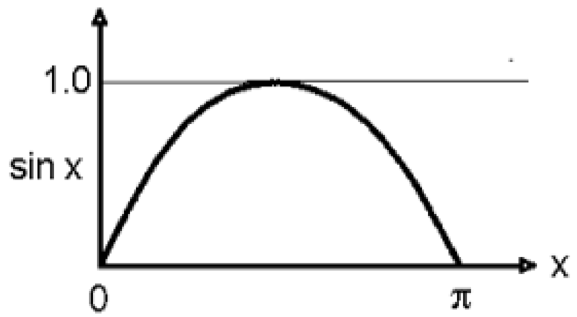
$$A_1 = ka_1(a_2 - a_1)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}[k(a_2 - a_1)](a_2 - a_1)$$

কাজেই $A = A_1 + A_2 = \frac{k}{2}(a_2{}^2 - a_1{}^2)$

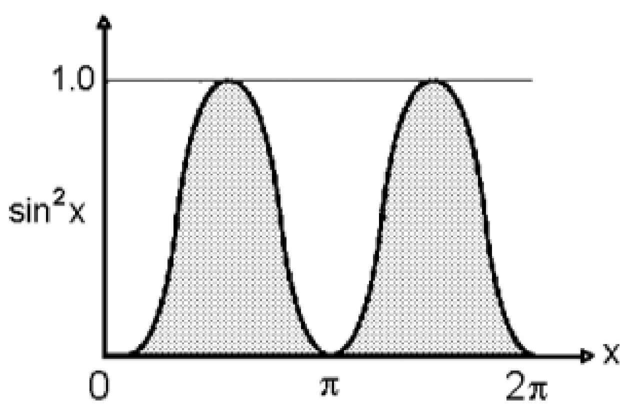
(ii) ২৩নং ছবিতে একটা $sinx$ ফাংশন আঁকা হয়েছে। এই ফাংশনটির 0 থেকে π পর্যন্ত ডেফিনিট ইন্টিগ্রাল বের করতে চাই।

$$A = \int_0^{\pi} sinx\, dx = -cosx\Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0)$$
$$= -(-1-1)$$
$$\int_0^{\pi} sinx\, dx = 2$$



২৩ নং ছবি

যদি 0 থেকে π পর্যন্ত বের না করে 0 থেকে 2π পর্যন্ত বের করতাম তাহলে কতো পেতাম?



২৪ নং ছবি

(iii) ধরা যাক $sinx$ ব্যবহার না করে যদি sin^2x ব্যবহার করে 0 থেকে 2π পর্যন্ত ডেফিনিট ইন্টিগ্রাল বের করতে চাই (২৪নং ছবি)।

$$A = \int_0^{2\pi} sin^2 x dx$$
$$sin^2x = \frac{1 - cos2x}{2}$$

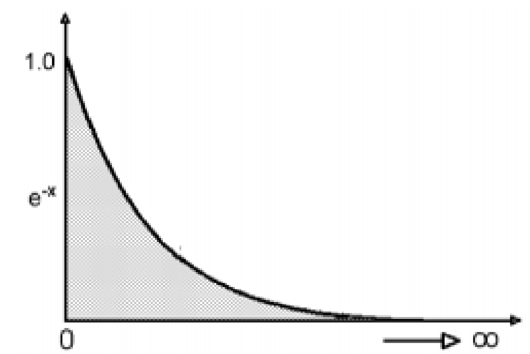
$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1-cos2x}{2} dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{sin2x}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{x}{2}\Big|_0^{2\pi} - \frac{sin2x}{4}\Big|_0^{2\pi}$$
$$A = \frac{1}{2}(2\pi - 0) - \frac{1}{4}(sin4\pi - sin0)$$
$$A = \pi$$

এটি একটি গুরুত্বপূর্ণ উত্তর কারণ আমরা যদি 0 থেকে 2π পর্যন্ত পুরো অংশটি একটা আয়তক্ষেত্র হিসেবে দেখি তাহলে তার ক্ষেত্রফল হচ্ছে

$$A = 2\pi \times 1 = 2\pi$$

sin^2x এর নিচের আবদ্ধ ক্ষেত্রফলটুকু হচ্ছে পুরো আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের ঠিক অর্ধেক!

(iv) আমরা কী কখনো অসীম পর্যন্ত ইন্টিগ্রেট করতে পারি? তোমাদের মনে হতে পারে তাহলে মানটুকু বুঝি হয়ে যাবে অসীম! কিন্তু e^{-x} ফাংশনকে 0 থেকে ∞ পযন্ত ইন্ট্রিগ্রেট করে দেখলে কেমন হয়?



২৫ নং ছবি

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^{\infty} = -(0-1)$$
$$I = 1$$

কী বিচিত্র! আমরা 1 এর একটি নূতন সংজ্ঞা পেয়ে গেলাম!

অনুশীলনী

1. $\int_0^4 \sqrt{t}dt =?$ বের কর।

2. $\int_{-4}^{-2} x^4 dx =?$ বের কর।

3. একটি গাড়ী $v = 5 + 6t$ বেগে যাচ্ছে, $t = 3$ এবং $t = 9$ সময়ের ভেতর গাড়ী কতো দূরত্ব অতিক্রম করবে?

4. $\int e^x dx =?$ বের কর।

5. $y = 9x - x^2$ এই রেখার নিচে $x = 0$ এবং $x = 3$ আবদ্ধ জায়গাটুকু ক্ষেত্রফল কতো?

পরিশিষ্ট

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 - tan\alpha\, tan\beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{tan\alpha - tan\beta}{1 + tan\alpha\, tan\beta}$$

$$\sin\theta + sin\varphi = 2sin\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right) cos\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right)$$

$$\sin\theta - sin\varphi = 2sin\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right) cos\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right)$$

$$\cos\theta + cos\varphi = 2cos\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right) cos\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right)$$

$$\cos\theta - cos\varphi = -2sin\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right) sin\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right)$$

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots\ldots (n-1) \times n$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\log(1 + x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \ldots$$

$$C_m^n = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

$$(x + y)^n = x^n + C_1^n x^{n-1} y + C_2^n x^{n-2} y^2 + C_3^n x^{n-3} y^3 + \cdots C_{n-1}^n x y^{n-1} + y^n$$